1 Trouver les réels x vérifiant $|x^2+1|+|x-2|=2$.

Corrigé : Comme dans beaucoup d'exercices avec des valeurs absolues, il s'agit de distinguer différents cas :

• Si $x \geq 2$, on a $x^2+1 \geq 0$ et $x-2 \geq 0$ ainsi l'équation devient :

$$x^2+1+x-2=2 \Leftrightarrow x^2+x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$$

Il est clair que $\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}<2$. D'autre part :

$$\sqrt{13}<4 \Leftrightarrow -1+\sqrt{13}<3 \Leftrightarrow \frac{-1+\sqrt{13}}{2}<\frac{3}{2}$$

Les deux racines trouvées dans ce cas ne vérifient pas la condition initiale $x \geq 2$.

• Si $x \leq 2$, on a $x^2+1 \geq 0$ et $x-2 \leq 0$ ainsi l'équation devient :

$$x^2+1-x+2=2 \Leftrightarrow x^2-x+1=0$$

Le discriminant de ce polynôme est nul, l'équation n'a pas de racine réelle dans ce cas.

$$\boxed{\text{L'équation n'a pas de solution}}$$

2 ★★ Montrer qu'il est impossible de trouver deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f \circ g(x)=x^2 \text{ et } g \circ f(x)=x^3$$

Corrigé : Par hypothèse, nous avons :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \underbrace{f \circ g(x)=x^2}_{(1)} \text{ et } \underbrace{g \circ f(x)=x^3}_{(2)}$$

• On applique f à la relation (2) ce qui donne :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f\circ g\circ f(x)=f(x^3) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f\circ g(f(x))=f(x^3) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \underbrace{f(x)^2=f(x^3)}_{(\bigstar)}$$

On va utiliser cette relation ($\bigstar$) avec $x=-1$, $x=0$ et $x=1$ ce qui donne :

$$f(-1)^2=f(-1),\ f(0)^2=f(0),\ f(1)^2=f(1)$$

Ainsi les trois réels $f(-1)$, $f(0)$ et $f(1)$ sont solutions de l'équation $X^2=X$, ils sont égaux à 0 ou à 1. Si trois réels prennent deux valeurs différentes alors au moins deux d'entre eux sont égaux. Il existe $a \in \{-1,0,1\}$ et $b \in \{-1,0,1\}$ tels que $f(a)=f(b)$ avec $a \neq b$. On applique g ce qui donne $g\circ f(a)=g\circ f(b)$ d'où $a^3=b^3$ et par suite $a=b$ (en effet la fonction cube est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

On aboutit à une contradiction, de telles fonctions f et g n'existent pas.

3 ★ Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$.

Corrigé : On considère l'hypothèse de récurrence valable pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}_n\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$$

• **Initialisation.** Pour $n=0$ l'inégalité est évidente.

• **Hérédité.** On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie pour un entier naturel n fixé. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|\sin((n+1)x)|=|\sin(nx+x)| \leq |\sin(nx)\cos(x)+\sin(x)\cos(nx)| \leq |\sin(nx)\cos(x)|+|\sin(x)\cos(nx)|$$

On utilise ensuite le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\cos(x)| \leq 1$. On obtient :

$$|\sin((n+1)x)| \leq |\sin(nx)| \times |\cos(x)| + |\sin(x)| \times |\cos(nx)| \leq |\sin(nx)| + |\sin(x)|$$

On applique ensuite l'hypothèse de récurrence :

$$|\sin((n+1)x)| \leq n|\sin(x)| + |\sin(x)| = (n+1)|\sin(x)|$$

Ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et termine la récurrence.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|}$$

$\boxed{4}$ ★★ Que dire de la dérivée ou d'une primitive d'une fonction paire ? Même question pour une fonction impaire. On pourra considérer que la fonction est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Corrigé : • Soit f une fonction paire et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrons que f' est impaire. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$, on dérive cette relation pour obtenir :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -f'(-x) = f'(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(-x) = -f'(x)$$

Ce qui démontre que f' est impaire.

• Si f est une fonction paire, on ne peut pas toujours affirmer qu'une primitive de f est impaire. En effet, la fonction $f : x \mapsto 3x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est paire, pourtant $F : x \mapsto x^3 + 1$ est une primitive de F qui n'est pas impaire.

• Soit f une fonction impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrons que f' est paire. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$, on dérive cette relation pour obtenir :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -f'(-x) = -f'(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(-x) = f'(x)$$

Ce qui démontre que f' est paire.

• Soit f une fonction impaire et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$, montrons que F est paire. Pour cela, on considère la fonction $g : x \mapsto F(-x) - F(x)$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -F'(-x) - F'(x) = -f(-x) - f(x) = 0 \text{ car } f' \text{ est impaire}$$

Ainsi g' est nulle sur $\mathbb{R}$ donc g est constante sur $\mathbb{R}$ sachant que $g(0) = 0$ on en déduit que g est nulle : c'est exactement la définition de F paire.

$\boxed{5}$ ★★★ Montrer que si l'on considère 3 réels positifs a, b et c alors au moins l'un des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\dfrac{1}{4}$.

Corrigé : • Si $a > 1$ alors $c(1-a)$ est négatif donc inférieur à $\dfrac{1}{4}$. De même si $b > 1$ ou $c > 1$.

• Il reste à traiter le cas où $(a, b, c) \in [0,1]^3$. Pour cela étudions la fonction $f : x \mapsto x(1-x)$ définie sur $[0,1]$. En dérivant et en formant le tableau de variation, on constate que : $\forall x \in [0,1],\ 0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{4}$. Si l'on fait le produit des trois quantités proposées, on obtient :

$$0 \leq a(1-b)b(1-c)c(1-a) = a(1-a)b(1-b)c(1-c) \leq \frac{1}{64}$$

Si le produit de trois réels positifs est inférieur ou égal à $\dfrac{1}{64}$ alors l'un des trois réels est inférieur ou égal à $\dfrac{1}{4}$, ce qu'il fallait démontrer. En effet par contraposition, si les trois réels sont supérieurs strictement à $\dfrac{1}{4}$ alors le produit serait supérieur strictement à $\dfrac{1}{64}$.

$\boxed{6}$ ★★★ Démontrer que :

$$\forall x > -1,\ (1+x)\ln(1+x)^2 \leq x^2$$

Corrigé : On remarque que l'inégalité à démontrer est équivalente à :

$$\forall x > -1,\ \ln(1+x)^2 \leq \frac{x^2}{1+x}$$

Ce qui nous incite à considérer la fonction :

$$\begin{array}{rccc} g & : &]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{x^2}{1+x} - \ln(1+x)^2 \end{array}$$

Nous devons démontrer que : $\forall x \in]-1,+\infty[,\ g(x) \geq 0$. La fonction g est dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme somme, produit et composée de fonctions usuelles qui sont dérivables sur leurs ensembles de définition.

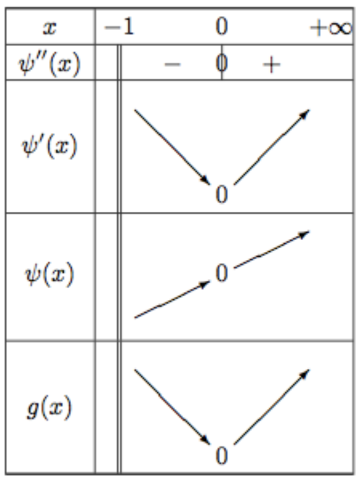
$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ g'(x) = \frac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} \times 2\ln(1+x) = \frac{x(x+2) - 2(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

Le signe du dénominateur est clair. Il reste à étudier le signe du numérateur. Pour cela, on pose :

$$\begin{array}{rccc} \psi & : &]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x(x+2) - 2(1+x)\ln(1+x) \end{array}$$

Il est clair que ψ est dérivable deux fois sur $]-1,+\infty[$ et :

$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ \psi'(x) = 2x - 2\ln(1+x) \text{ et } \psi''(x) = 2 - \frac{2}{1+x} = \frac{2x}{1+x}$$



On constate que : $\forall x \in]-1,+\infty[,\ g(x) \geq 0$ ce qui est le résultat voulu.

$$\boxed{\forall x > -1,\ (1+x)\ln(1+x)^2 \leq x^2}$$

Il aurait été plus naturel de considérer la fonction $f : x \mapsto x^2 - (1+x)\ln(1+x)^2$, mais les calculs qui en découlent sont moins aisés.

7 ★★★ Montrer que :

$$\forall (x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}_+, \ \sqrt{1+y^2} \geq xy + \sqrt{1-x^2}$$

Corrigé : Fixons $x \in [0,1]$, on va considérer la fonction :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & & y & \mapsto & \sqrt{1+y^2} - xy - \sqrt{1-x^2} \end{array}$$

Le but va être de démontrer que f est positive ainsi on aura bien l'inégalité souhaitée. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \ f'(y) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} - x = \frac{y - x\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+y^2}}$$

Dans la suite du calcul, on suppose que $x \neq 1$, on traitera le cas $x = 1$ à la fin. Étudions le signe de f', pour $y \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned} f'(y) \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad y \geq x\sqrt{1+y^2} \\ &\Leftrightarrow \quad y^2 \geq x^2(1+y^2) \\ &\Leftrightarrow \quad y^2(1-x^2) \geq x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad y^2 \geq \frac{x^2}{1-x^2} \\ &\Leftrightarrow \quad y \geq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Ceci nous permet d'affimer que f est décroissante sur $\left[0, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, +\infty\right[$. Elle atteint son minimum en $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Il reste à démontrer que ce minimum est nul, en effet :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) &= \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} - x\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} \\ &= \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}} - x\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} \\ &= \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2} = 0 \end{aligned}$$

Ce qui donne l'inégalité souhaitée. Il reste le cas où $x = 1$, l'inégalité devient : $\forall y \in \mathbb{R}_+, \ \sqrt{1+y^2} \geq y$, en effet :

$$\sqrt{1+y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y| = y$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}_+, \ \sqrt{1+y^2} \geq xy + \sqrt{1-x^2}}$$

8 ★★★ Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x^4 + y) = x^3 f(x) + f(f(y))$$

Corrigé : • **Analyse.** On suppose la relation vérifiée. Déjà, pour $x = 0$, on a :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f(y) = f(f(y))$$

En reportant dans la relation de départ, on obtient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x^4 + y) = x^3 f(x) + f(y)$$

On fixe $x \in \mathbb{R}$ et on dérive la relation ci-dessus par rapport à y :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f'(x^4 + y) = f'(y) \quad (\bigstar)$$

En particulier pour $y = 0$, cela donne : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x^4) = f'(0)$. Quand x décrit $\mathbb{R}$, on a x^4 qui décrit $\mathbb{R}_+$, on a donc : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ f'(t) = f'(0)$. En reprenant la relation $(\bigstar)$ avec $y = -x^4$, il vient : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(0) = f'(-x^4)$. On en déduit de même que : $\forall t \in \mathbb{R}_-,\ f'(0) = f'(t)$. Finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = f'(0)$$

La fonction f' est constante sur $\mathbb{R}$ ainsi f est une fonction affine :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$$

• **Synthèse.** Soit f une fonction affine définie comme ci-dessus, déjà f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x^4 + y) = x^3 f(x) + f(f(y)) &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ a(x^4 + y) + b = x^3(ax + b) + a(ay + b) + b \\
&\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (a - a^2)y - bx^3 - ab = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a - a^2 = 0 \\ b = 0 \\ ab = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que les solutions de cette équation fonctionnelle sont la fonction nulle et la fonction $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

$$\boxed{\mathcal{S} = \{0, \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\}}$$

9 ★★★ Soient $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ tels que $x \leq y + z$. Démontrer que : $\dfrac{x}{1 + x} \leq \dfrac{y + z}{1 + y + z}$. En déduire que :

$$\frac{x}{1 + x} < \frac{y}{1 + y} + \frac{z}{1 + z}$$

Corrigé : On pose :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t}{1 + t} \end{array}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ f'(t) = \frac{1}{(1 + t)^2} > 0$$

Ainsi l'application f est (strictement) croissante sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $x \leq y+z$, on en déduit que $f(x) \leq f(y+z)$, c'est la première inégalité demandée. Il reste à démontrer que $f(y+z) < f(y)+f(z)$, on aura alors $f(x) < f(y)+f(z)$ ce qui constitue la deuxième partie de la question. Fixons $z \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t)+f(z)-f(t+z) \end{array}$$

On va démontrer que pour tout $t > 0$, $g(t) > 0$ ainsi on aura $g(y) > 0$ ce qui permettra de conclure. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ est :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ g'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1+t+z)^2} > 0$$

La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, de plus $g(0) = f(z) - f(z) = 0$ donc g est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. En particulier pour $y > 0$:

$$g(y) > 0 \Leftrightarrow f(y)+f(z)-f(y+z) > 0 \Leftrightarrow f(y+z) < f(y)+f(z)$$

Finalement pour tous $(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ avec $x \leq y+z$, on a :

$$f(x) \leq f(y+z) < f(y)+f(z) \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} \leq \frac{y+z}{1+y+z} < \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z}$$

$$\boxed{\forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3,\ x \leq y+z \Rightarrow \frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z}}$$

10 ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f : x \mapsto x^n$ définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que f est bijective de deux manières différentes :
   (a) En trouvant l'expression de f^{-1}.
   (b) En étudiant les variations de f.
2. Déterminer la dérivée de f^{-1} en utilisant le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque.

Corrigé :

1. (a) Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$, résolvons l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^n \Leftrightarrow \ln(y) = n\ln(x) \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{n}\ln(y) \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{n}\ln(y)} \Leftrightarrow x = y^{\frac{1}{n}}$$

   Ainsi f est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ y & \mapsto & y^{\frac{1}{n}} \end{array}$$

   (b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que fonction polynomiale et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $f'(x) = nx^{n-1} > 0$. Ainsi la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, d'autre part f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Enfin, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. D'après le théorème de la bijection, on en déduit que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

2. Appliquons le théorème de dérivabilité d'une fonction réciproque. La fonction f est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et nous avons vu que sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{n(y^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n}y^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}$$

   Ce qui est bien le résultat attendu, d'après nos connaissances sur les fonctions puissances.

11 ★ On pose $f : x \mapsto xe^x$ et on appelle fonction de Lambert, notée W, la bijection réciproque de f restreinte à $[-1, +\infty[$.

1. Justifier l'existence de W.
2. Étudier la dérivabilité de W et exprimer W' en fonction de W.
3. Résoudre l'équation $x + \ln(x) = 2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Corrigé :

1. La fonction f est dérivable sur $[-1, +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $[-1, +\infty[$. On a :

$$\forall x \in [-1, +\infty[,\ f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

La fonction f' est strictement positive sur $]-1, +\infty[$ et $f'(-1) = 0$. On en déduit que f est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. La fonction f est également continue sur $[-1, +\infty[$, $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -e^{-1}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection strictement croissante de $[-1, +\infty[$ dans $[-e^{-1}, +\infty[$. Sa bijection réciproque existe et on a : $W\ :\ [-1, +\infty[\to [-e^{-1}, +\infty[$.

2. On applique le théorème relatif à la dérivée d'une bijection réciproque. On a vu que $f'(-1) = 0$, ainsi W ne sera pas dérivable en $-e^{-1}$ et on va exclure ce point de notre étude. La fonction f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $f'(x) \neq 0$. On en déduit que W est dérivable sur $]-e^{-1}, +\infty[$ et d'après la formule vue en cours :

$$\forall y \in]-e^{-1}, +\infty[,\ W'(y) = \frac{1}{f'(W(y))} = \frac{1}{(W(y)+1)e^{W(y)}} \qquad \text{(ici } W = f^{-1}\text{)}$$

3. On a $x + \ln(x) = 2$ si et seulement si $e^{x+\ln(x)} = e^2$, c'est-à-dire $xe^x = e^2$. Avec les notations de l'exercice, l'équation devient $f(x) = e^2$ qui équivaut à $x = W(e^2)$ qui est bien défini car $e^2 \in [-e^{-1}, +\infty[$. L'unique solution est $x = W(e^2)$.

12 ★ Soit $f : x \mapsto \ln(x^2 - 2x + 3)$.

1. Donner l'ensemble de définition et de dérivabilité de f.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers un intervalle à préciser.
3. Expliciter la bijection réciproque de f restreinte à $[1, +\infty[$. On s'autorisera à noter f^{-1} cette bijection réciproque.
4. Donner l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée de f^{-1} de deux façons différentes : en utilisant la formule donnant la dérivée d'une réciproque et en utilisant directement l'expression trouvée à la question précédente.

Corrigé :

1. Posons $u : x \mapsto x^2 - 2x + 3$ et remarquons tout de suite que la fonction u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 = -8$, ainsi la fonction u est strictement positive sur $\mathbb{R}$. La fonction ln étant définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{2(x - 1)}{x^2 - 2x + 3}$$

Ainsi, pour tout $x > 1$, on a : $f'(x) > 0$ et $f'(1) = 0$ donc f est <u>strictement croissante</u> sur $[1, +\infty[$. D'autre part, f est <u>continue</u> sur $[1, +\infty[$ car dérivable sur cet intervalle. Enfin, $\underline{\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \ln(2) \text{ et } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

Ce dernier résultat s'obtient par composition de limites puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2x + 3) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et ln tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Toutes les conditions sont réunies pour appliquer le théorème de la bijection et en déduire que :

$$\boxed{f \text{ réalise une bijection de } [1, +\infty[\text{ vers } [\ln(2), +\infty[}$$

3. Soit $x \in [1, +\infty[$ et $y \in [\ln(2), +\infty[$. On a :

$$\begin{array}{rcl} y = f(x) & \Leftrightarrow & y = \ln(x^2 - 2x + 3) \\ & \Leftrightarrow & e^y = x^2 - 2x + 3 \\ & \Leftrightarrow & x^2 - 2x + 3 - e^y = 0 \end{array}$$

On reconnaît un trinôme du second degré, son discriminant vaut $\Delta = 4 - 4(3 - e^y) = 4(e^y - 2)$. Or, par hypothèse, $y \geq \ln(2)$ donc $\Delta \geq 0$. L'équation admet deux solutions réelles, éventuellement confondues :

$$x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{e^y - 2}}{2} = 1 + \sqrt{e^y - 2} \text{ et } x_2 = \frac{2 - 2\sqrt{e^y - 2}}{2} = 1 - \sqrt{e^y - 2}$$

Si $y = \ln(2)$, les deux solutions sont confondues mais dès que $y > \ln(2)$, on a : $x_2 < 1$: cette solution est à exclure car $x \in [1, +\infty[$. Ainsi l'unique antécédent de y dans $[1, +\infty[$, qui existe d'après la question 2., est :

$$x_1 = 1 + \sqrt{e^y - 2}$$

$$\boxed{\begin{array}{rcccc} f^{-1} & : & [\ln(2), +\infty[& \to & [1, +\infty[\\ & & y & \mapsto & 1 + \sqrt{e^y - 2} \end{array}}$$

4. • Appliquons le théorème donnant la dérivée d'une bijection réciproque. La fonction f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a : $f'(x) \neq 0$, ainsi f^{-1} est dérivable sur $]\ln(2), +\infty[$ et :

$$\begin{array}{rcl} \forall y \in]\ln(2), +\infty[, \ (f^{-1})'(y) & = & \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))} \\ & = & \dfrac{(1 + \sqrt{e^y - 2})^2 - 2(1 + \sqrt{e^y - 2}) + 3}{2(1 + \sqrt{e^y - 2} - 1)} \\ & = & \dfrac{1 + 2\sqrt{e^y - 2} + e^y - 2 - 2 - 2\sqrt{e^y - 2} + 3}{2\sqrt{e^y - 2}} \\ & = & \dfrac{e^y}{2\sqrt{e^y - 2}} \end{array}$$

Par contre $f'(1) = 0$ donc f^{-1} ne sera pas dérivable en $f(1) = \ln(2)$.
• D'autre part, on peut utiliser l'expression de f^{-1} trouvée à la question 3., la fonction racine carrée étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit, par composition, que f^{-1} est dérivable sur $]\ln(2), +\infty[$ et :

$$\forall y \in]\ln(2), +\infty[,\ (f^{-1})'(y) = \frac{e^y}{2\sqrt{e^y - 2}}$$

en appliquant la formule $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. On retrouve bien le même résultat qu'avec l'autre méthode.

$$\boxed{\forall y \in]\ln(2), +\infty[,\ (f^{-1})'(y) = \frac{e^y}{2\sqrt{e^y - 2}}}$$