1. On fait apparaitre deux produits télescopiques :
$$\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+2}=\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\times\frac{k+1}{k+2}=\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\times\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k+2}=\frac{1}{n+1}\times\frac{2}{n+2}=\underline{\frac{2}{(n+1)(n+2)}}$$

2. On reconnait la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 2, le premier terme est 9 et le dernier vaut $2n+7$. Le nombre de termes est n, d'où :
$$\sum_{k=4}^{n+3}(2k+1)=\frac{(9+2n+7)\times n}{2}=\underline{(n+8)n}$$

3. On fait apparaitre la somme des termes d'une suite géométrique :
$$\sum_{k=1}^{n}3^{2k-1}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}9^k=\frac{1}{3}\times 9\times\frac{9^n-1}{9-1}=\underline{\frac{3}{8}(9^n-1)}$$

4. On commence par faire un changement d'indice en posant $i=k+1$ puis on ajoute les termes manquants pour faire apparaitre une formule du binôme :
$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=2}^{n}\binom{n+1}{i} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\right)-\binom{n+1}{0}-\binom{n+1}{1}-\binom{n+1}{n+1} \\ &= 2^{n+1}-1-(n+1)-1 \\ &= 2^{n+1}-n-3 \end{aligned}$$
$$\underline{S=2^{n+1}-n-3}$$

5. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a :
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} ij \\ &= \sum_{j=1}^{n} j\sum_{i=1}^{j-1} i \\ &= \sum_{j=1}^{n} j\times\frac{1}{2}(j-1)j \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j^3-j^2) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\Big) \\ &= \frac{1}{24}n(n+1)\Big(3n(n+1)-2(2n+1)\Big) \\ &= \frac{1}{24}n(n+1)(3n^2-n-2) \end{aligned}$$

$$\underline{S_n = \frac{1}{24} n(n+1)(3n^2 - n - 2)}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$, on cherche à décomposer la fraction comme une somme de deux fractions plus simples. C'est-à-dire que l'on cherche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{\alpha}{2k-1} + \frac{\beta}{2k+1}$$

En réduisant au même dénominateur et en identifiant les numérateurs, on obtient :

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\Big)$$

On en déduit que :

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2n+1}\Big)$$

ceci en reconnaissant une somme télescopique.

$$\underline{S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2}}$$

7. On forme une table de vérité en notant, comme d'habitude, V pour vrai et F pour faux.

P	Q	R	P ou Q	$(P$ ou $Q) \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow R)$ et $(Q \Rightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

On constate que les colonnes des propositions "$(P$ ou $Q) \Rightarrow R$" et de "$(P \Rightarrow R)$ et $(Q \Rightarrow R)$" sont identiques, ce qui démontre le résultat annoncé.

$$\boxed{(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R \sim (P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)}$$

8. (a) D'après le cours, si A et B sont deux propositions la négation de $A \Rightarrow B$ est : A et non(B). Ainsi la négation de P est :

$$\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0 \text{ et } x > 0$$

   (b) i. La proposition P est **vraie** puisque pour x réel :

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

   Ce qui démontre que si $f(x) > 0$ alors $x \leq 0$.

   ii. Pour la fonction constante égale à -1, la condition $f(x) > 0$ est toujours fausse. Lorsque la proposition de départ est fausse alors l'implication est vraie. Dans ce cas la proposition P est **vraie**.

iii. C'est le même raisonnement que pour la question précédente. La condition initiale est toujours fausse donc P est **vraie**.

iv. C'est **faux**. Par exemple $f(3) = 3 > 0$ et $3 > 0$, cela montre que la négation de P est vraie.

v. C'est **faux** car, comme dans la question précédente, la négation de P est vérifiée puisque l'on a $f(3) = 1 > 0$ et $3 > 0$.

vi. C'est également **faux** par le même argument qu'aux questions iv) et v).

Exercice

Ce problème illustre une méthode pour obtenir un encadrement sur une somme à l'aide d'encadrements sur les fonctions mises en jeu.

1. (a) On pose $f : x \mapsto x - \sin(x)$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions usuelles définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 - \cos(x)$$

Or la fonction cosinus est majorée sur $\mathbb{R}$ par 1, ainsi pour tout x réel, f' est positive. Ceci implique que f est croissante sur $\mathbb{R}$. En particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \geq f(0) = 0$$

Ce qui démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \sin(x) \geq 0$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sin(x) \leq x}$$

(b) On pose $g : x \mapsto \sin(x) + \dfrac{x^3}{3} - x$. La fonction g est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions usuelles définies et dérivables deux fois sur $\mathbb{R}$: la fonction sinus et une fonction polynomiale.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \cos(x) + \frac{x^2}{2} - 1$$

Le signe de g' n'apparaît pas clairement, on dérive une seconde fois :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = -\sin(x) + x$$

Nous avons vu à la question précédente que pour tout x réel positif, $g''(x) \geq 0$ ainsi la fonction g' est croissante sur $\mathbb{R}_+$, ce qui implique que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g'(x) \geq g'(0) = 0$$

La fonction g est également croissante sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) \geq g(0) = 0$$

Ce qui démontre que : $x \in \mathbb{R}_+,\ \sin(x) \geq x - \dfrac{x^3}{6}$. Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x \quad (\bigstar)}$$

2. (a) Soit $(k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. On applique la formule ($\bigstar$) avec $x = \dfrac{k}{n^2}$ qui est bien un réel positif puisque k est un entier naturel. Cela donne :

$$\frac{k}{n^2} - \frac{1}{6}\left(\frac{k}{n^2}\right)^3 \leq \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$$

$$\boxed{\forall (k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*,\ \frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6} \leq \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On somme les inégalités précédentes pour k allant de 1 à n, cela donne :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$$

On utilise ensuite la linéarité de la somme et on met en facteur les constantes :

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{6n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3 \leq \sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$

Avec les notations données par l'énoncé cela s'écrit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n^2}S_1 - \frac{1}{6n^6}S_3 \leq T_n \leq \frac{1}{n^2}S_1}$$

3. D'après le cours :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1) \text{ et } \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2}$$

4. On reprend l'écriture trouvée à la question 2.(b) en détaillant les sommes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n^2(n+1)^2}{24n^6} \leq T_n \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

On a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$ en faisant la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

D'autre part $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(n+1)^2}{24n^6}$=0 puisque le degré du numérateur est 4 et celui du dénominateur est 6.

D'après le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} T_n = \frac{1}{2}}$$