Ces questions sont indépendantes.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+2}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+3}(2k+1)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^{2k-1}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n+1}{k+1}$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$.
7. Soient P, Q et R trois propositions, démontrer que $(P$ ou $Q) \Rightarrow R$ est équivalente à $(P \Rightarrow R)$ et $(Q \Rightarrow R)$. On pourra utiliser une table de vérité.
8. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère la proposition P suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0$$

   (a) Écrire la négation de la proposition P.

   (b) Dire si la proposition P est vraie ou fausse pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, vous justifierez vos réponses :
   i) $f(x) = -x$ ii) $f(x) = -1$ iii) $f(x) = -x^2$ iv) $f(x) = x$ v) $f(x) = 1$ ii) $f(x) = x^2$

Exercice

Le but de cet exercice est de déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

On note $S_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^i$ pour $i \in \{1, 3\}$.

1. (a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sin(x) \leq x$.

   (b) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin(x)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Démontrer que pour tout entier naturel k :

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6} \leq \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$$

   (b) En déduire un encadrement de T_n à l'aide des sommes S_1 et S_3.
3. Rappeler la valeur de S_1 et S_3, aucune démonstration n'est demandée.
4. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n$.

Problème

À Noël, la classe de MPSI2 décide de s'offrir des cadeaux. Chacun achète un petit cadeau et le dépose au pied d'un sapin. Puis chaque élève choisit au hasard l'un des cadeaux présents au pied du sapin, éventuellement le sien. Ce problème s'intéresse à la probabilité que chaque élève reparte avec un cadeau différent du sien. Nous montrerons notamment que cette probabilité tend vers e^{-1} quand le nombre de participants tend vers $+\infty$.

Partie A : Formule d'inversion de Pascal

Dans toute cette partie, on considère deux suites de nombres réels $(f_n)_{n\geq 0}$ et $(g_n)_{n\geq 0}$ liées par la relation suivante :

$$\forall n \geq 0,\ f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_k$$

1. Exprimer f_0, f_1 et f_2 en fonction de g_0, g_1 et g_2.
2. Calculer le terme général de la suite (f_n) dans les cas suivants :
   a) $\forall k \in \mathbb{N},\ g_k = 1$.
   b) $\forall k \in \mathbb{N},\ g_k = 2^k$.
   c) $\forall k \in \mathbb{N},\ g_k = (-1)^k$.
   d) $\forall k \in \mathbb{N},\ g_k = e^{ka}$ où a est un nombre complexe fixé.
3. Démontrer que $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k}$ où $0 \leq j \leq k \leq n$ sont des entiers.
4. Démontrer la formule d'inversion de Pascal : $\forall n \geq 0,\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} f_k = g_n$.

Partie B : Nombre de dérangements

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n personnes mettant chacune un cadeau au pied d'un sapin. Puis chaque participant choisit au hasard un cadeau, il est possible qu'une ou plusieurs personnes reçoivent alors leur propre cadeau.

1. Justifier que le nombre total de distributions possibles, sans aucune contrainte, est $n!$.
   Dans la suite du problème, on note d_n le nombre de distributions de cadeaux entre n participants telles que tout le monde reçoive un cadeau différent du sien. Une telle distribution s'appelle un dérangement. On adopte la convention $d_0 = 1$.
2. Donner, en les justifiant, les valeurs de d_1, d_2, d_3 et d_4.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$. Justifier que le nombre de distributions telles que k personnes exactement reçoivent leur propre cadeau est $\binom{n}{k} d_{n-k}$.
4. Justifier que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.
5. Démontrer que pour tout $n \geq 0$, on a : $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$.
6. Justifier que lors d'une distribution aléatoire des cadeaux, la probabilité que personne ne reçoive son propre cadeau est $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$.

Partie C : Estimation asymptotique

Le but de cette partie est d'estimer, quand n tend vers $+\infty$, la quantité $\dfrac{d_n}{n!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{k!}$ qui correspond à la probabilité que tout le monde ait un cadeau différent du sien lors de la distribution.

1. Montrer que pour tout x réel et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $e^x = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$.

   On pourra effectuer une récurrence et utiliser le théorème d'intégration par parties.
2. En déduire une expression de $\dfrac{d_n}{n!}$ en fonction de e^{-1} et d'une intégrale à préciser.
3. (a) Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$ deux réels. Montrer que : $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.

   (b) Montrer que quand n tend vers $+\infty$, la quantité $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{(-1-t)^n}{n!} e^t dt$ tend vers 0.
4. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{d_n}{n!}$. Conclure.