

1 ★★★ Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, démontrer que :

$$\frac{\operatorname{sh}(x)}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(x) + \operatorname{ch}^2(x)}} < \operatorname{th}(x) < x < \operatorname{sh}(x) < \frac{1}{2}\operatorname{sh}(2x)$$

En déduire que pour tous $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ avec $a \neq b$:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln(b) - \ln(a)} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Corrigé : Démontrons ces inégalités de gauche à droite :

• La première inégalité est équivalente à : $\frac{\operatorname{sh}(x)}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(x) + \operatorname{ch}^2(x)}} < \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$. On peut simplifier par $\operatorname{sh}(x)$ puisque pour tout $x > 0$, on a $\operatorname{sh}(x) > 0$, ce qui donne : $\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(x) + \operatorname{ch}^2(x)}} < \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$. Cette dernière inégalité est évidente en élevant au carré.

• Pour la seconde inégalité, on pose $f : x \mapsto x - \operatorname{th}(x)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = 1 - (1 - \operatorname{th}^2(x)) = \operatorname{th}^2(x) > 0$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ ainsi :

$$\forall x > 0, f(x) > f(0) = 0 \Leftrightarrow \forall x > 0, x > \operatorname{th}(x)$$

• Pour la troisième inégalité, on étudie $g : x \mapsto \operatorname{sh}(x) - x$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = \operatorname{ch}(x) - 1 > 0$$

La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc :

$$\forall x > 0, g(x) > g(0) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sh}(x) > x$$

• Enfin, nous avons déjà démontré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)$. Or pour $x > 0$, on a : $\operatorname{ch}(x) > 1$ donc :

$$\forall x > 0, \operatorname{sh}(x) < \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sh}(2x)$$

Ce qui constitue la dernière inégalité à démontrer.

$$\frac{\operatorname{sh}(x)}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(x) + \operatorname{ch}^2(x)}} < \operatorname{th}(x) < x < \operatorname{sh}(x) < \frac{1}{2}\operatorname{sh}(2x)$$

On suppose que $0 < a < b$ et on va appliquer les inégalités précédentes à $x = \ln\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$. Dans le cas où $0 < b < a$, on suit la même démarche en posant $x = \ln\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$. Explicitons les expressions obtenues :

• $\operatorname{sh}(x) = \operatorname{sh}\left(\ln\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\ln\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)} - e^{-\ln\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}}\right)$. Ainsi :

$$\operatorname{sh}^2(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 2\right)$$

De même :

$$\operatorname{ch}^2(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 2\right)$$

Ce qui donne :

$$\operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}^2(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)$$

Finalement :

$$\frac{\operatorname{sh}(x)}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(x) + \operatorname{ch}^2(x)}} = \frac{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}} \right)}{\sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{a^2 + b^2}{ab} \right)}} = \frac{b - a}{2\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}}$$

- Avec le même type de calculs, on obtient :

$$\operatorname{th}(x) = \frac{b - a}{b + a}$$

- Enfin :

$$\operatorname{sh}(2x) = \frac{1}{2} \left(e^{\ln(\frac{b}{a})} - e^{-\ln(\frac{b}{a})} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) = \frac{b^2 - a^2}{2ab}$$

L'inégalité devient :

$$\frac{b - a}{2\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}} < \frac{b - a}{b + a} < \ln \left(\sqrt{\frac{b}{a}} \right) < \frac{b - a}{2\sqrt{ab}} < \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{2ab}$$

C'est exactement l'inégalité souhaitée en divisant par $\frac{b - a}{2} > 0$ et en passant à l'inverse.

$$\boxed{\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, a \neq b, \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{b - a}{\ln(b) - \ln(a)} < \frac{a + b}{2} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}}$$

Le réel $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ est appelé *moyenne harmonique* de a et b , le réel $\sqrt{ab}$ est appelé *moyenne géométrique* de a et b , le réel $\frac{b - a}{\ln(b) - \ln(a)}$ est appelé *moyenne logarithmique* de a et b , le réel $\frac{a + b}{2}$ est appelé *moyenne arithmétique* de a et b et le réel $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ est la *moyenne quadratique* de a et b .

2 ★★★ Démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \operatorname{Arcsin} \left(\frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+2}\sqrt{k+1}} \right) = \frac{\pi}{2}$$

Corrigé : • Déjà le terme général de la somme est bien défini car pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$k + 1 \leq k + 1 + 2\sqrt{k} = (\sqrt{k} + 1)^2 \text{ ce qui équivaut à } \sqrt{k+1} \leq \sqrt{k} + 1$$

Ce qui démontre que :

$$0 \leq \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+2}\sqrt{k+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{k+2}\sqrt{k+1}} \leq 1$$

La fonction Arcsin étant définie sur $[-1, 1]$, l'expression proposée est bien définie.

- L'idée va être de faire apparaître une somme télescopique. Soit $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+2}\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \sqrt{\frac{k+1}{k+2}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}} \sqrt{\frac{k}{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \sqrt{1 - \frac{1}{k+2}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}} \sqrt{1 - \frac{1}{k+1}}$$

On pose $b_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ et on utilise la formule $\cos(\operatorname{Arcsin}(a)) = \sqrt{1 - a^2}$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+2}\sqrt{k+1}} &= b_k \sqrt{1 - b_{k+1}^2} - b_{k+1} \sqrt{1 - b_k^2} \\ &= \sin(\operatorname{Arcsin}(b_k)) \cos(\operatorname{Arcsin}(b_{k+1})) - \sin(\operatorname{Arcsin}(b_{k+1})) \cos(\operatorname{Arcsin}(b_k)) \\ &= \sin(\operatorname{Arcsin}(b_k) - \operatorname{Arcsin}(b_{k+1})) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^n \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+2}\sqrt{k+1}}\right) = \sum_{k=0}^n \left(\operatorname{Arcsin}(b_k) - \operatorname{Arcsin}(b_{k+1})\right) = \operatorname{Arcsin}(b_0) - \operatorname{Arcsin}(b_{n+1}) = \operatorname{Arcsin}(1) - \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)$$

Pour conclure, il reste à remarquer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{Arcsin}(x) = 0$ puisque la fonction Arcsin est continue en 0. D'autre part, $\operatorname{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+2}\sqrt{k+1}}\right) = \frac{\pi}{2}}$$

3 ★ Trouver tous les réels x tels que : $\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{4}\right) = \operatorname{Arcsin}(x)$.

Corrigé : L'équation a un sens pour $x \in [-1, 1]$. Par décroissance de la fonction Arccos sur $[0, \pi]$, on a :

$$\frac{1}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right) > \frac{\pi}{4}$$

$$\text{et } \frac{1}{4} < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{4}\right) > \frac{\pi}{4}$$

Ainsi en sommant, on obtient : $\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{4}\right) > \frac{\pi}{2}$. Cependant la fonction Arcsin est à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ce qui fait que l'équation ne peut pas avoir de solution.

$$\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$$

4 ★★ Trouver tous les réels x tels que : $\operatorname{Arcsin}(2x-1) + 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Corrigé : • Intéressons-nous avant tout à l'ensemble de définition du membre de gauche de l'équation. La fonction Arcsin est définie sur $[-1, 1]$, on a :

$$-1 \leq 2x-1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$$

D'autre part, un rapide tableau de signe nous indique que $\frac{1-x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in]0, 1]$. La fonction Arctan étant définie sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $x \in]0, 1]$.

• Pour tout $x \in]0, 1]$, il existe un unique $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = \cos^2(a)$. Ce changement de variable va être destiné à mettre en évidence des formules de trigonométrie. Exprimons le membre de gauche uniquement en fonction de a .

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin}(2x-1) + 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) &= \operatorname{Arcsin}(2\cos^2(a)-1) + 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-\cos^2(a)}{\cos^2(a)}}\right) \\ &= \operatorname{Arcsin}(\cos(2a)) + 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\tan^2(a)}\right) \\ &= \operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-2a\right)\right) + 2\operatorname{Arctan}(\tan(a)) \text{ car } \tan(a) \geq 0 \text{ puisque } a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ &= \frac{\pi}{2} - 2a + 2a \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

À la fin du calcul, nous avons utilisé la simplification : $\text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2a\right)\right) = \frac{\pi}{2} - 2a$ ce qui est valable car $\frac{\pi}{2} - 2a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ puisque $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi tout réel de l'intervalle $]0, 1]$ est solution.

$$\mathcal{S} =]0, 1]$$

5 ★★★ Démontrer de deux façons différentes que :

$$\forall x \geq 1, \text{Arccos}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \text{Arcsin}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = \pi$$

1. En dérivant.
2. En effectuant un changement de variable.

Corrigé :

1. On pose $f : x \mapsto \text{Arccos}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \text{Arcsin}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$, démontrons que f est définie et dérivable sur $[1, +\infty[$. Les fonctions Arccos et Arcsin sont définies sur $[-1, 1]$ et dérivables sur $] -1, 1[$. Pour $x \geq 1$, on a :

$$-1 < \frac{1-x}{1+x} \text{ et } \frac{1-x}{1+x} < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 \text{ et } 0 < 2x$$

ce qui est vérifié pour $x \geq 1$.

D'autre part, il est clair que $-1 < \frac{\sqrt{x}}{1+x}$, on aussi pour $x > 1$:

$$(\sqrt{x} - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow 1 + x > 2\sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{1+x} < 1$$

Finalement f est bien définie sur $[1, +\infty[$ mais elle n'est à priori dérivable que sur $]1, +\infty[$. Pour $x \in]1, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}} + \frac{\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(1+x)-2\sqrt{x}}{(1+x)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)^2}} \\ &= \frac{2}{(1+x)^2 \sqrt{\frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1+x)^2}}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2 \sqrt{\frac{(1+x)^2-4x}{(1+x)^2}}} \\ &= \frac{2}{(1+x)\sqrt{4x}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)\sqrt{(1-x)^2}} \\ &= \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Lors de ce calcul, nous avons utilisé la simplification $\sqrt{(1-x)^2} = -(1-x)$ ce qui est correct car $x > 1$ donc $1-x < 0$. Ainsi la fonction f est constante sur $]1, +\infty[$, elle est égale à sa limite en $+\infty$ que l'on peut déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arccos}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \text{Arccos}(-1) = \pi \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arcsin}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = \text{Arcsin}(0) = 0$$

La limite en $+\infty$ est égale à π , on en déduit que :

$$\forall x > 1, \text{Arccos}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \text{Arcsin}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = \pi$$

On vérifie que cette formule est également vraie pour $x = 1$.

2. D'après la question 1., l'expression proposée est bien définie sur $[1, +\infty[$. On change de variable en posant $x = \tan^2(a)$ avec $a \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) &= \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)}\right) + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2\tan(a)}{1+\tan^2(a)}\right) \\ &= \operatorname{Arccos}(\cos(2a)) + \operatorname{Arcsin}(\sin(2a)) \end{aligned}$$

Ceci en reconnaissant les formules de l'arc moitié (c'est ce qui nous oriente vers ce changement de variable).

- On a $a \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $2a \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ intervalle sur lequel on peut simplifier : $\operatorname{Arccos}(\cos(2a)) = 2a$
- Pour l'autre simplification, on a : $2a \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ainsi $\pi - 2a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, ce qui permet d'affirmer que :

$$\operatorname{Arcsin}(\sin(2a)) = \operatorname{Arcsin}(\sin(\pi - 2a)) = \pi - 2a$$

On obtient bien :

$$\operatorname{Arccos}(\cos(2a)) + \operatorname{Arcsin}(\sin(2a)) = \pi$$

Ce qui démontre la formule annoncée.

$$\forall x \geq 1, \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = \pi$$

6 ★ Simplifier $A = \operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(5) + \operatorname{Arctan}(8)$.

Corrigé : En utilisant la formule pour simplifier $\tan(a+b)$, on a :

$$\tan(\operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(5)) = \frac{2+5}{1-2 \times 5} = -\frac{7}{9}$$

Puis :

$$\tan((\operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(5)) + \operatorname{Arctan}(8)) = \frac{-\frac{7}{9} + 8}{1 + \frac{7}{9} \times 8} = \frac{\frac{65}{9}}{\frac{65}{9}} = 1$$

On a $\tan(A) = 1$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $A = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Il reste à encadrer A . Par stricte croissance de la fonction Arctan , on a :

$$\operatorname{Arctan}(1) < \operatorname{Arctan}(2) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \operatorname{Arctan}(2) < \frac{\pi}{2}$$

De même :

$$\frac{\pi}{4} < \operatorname{Arctan}(5) < \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{\pi}{4} < \operatorname{Arctan}(8) < \frac{\pi}{2}$$

En sommant, il vient $\frac{3\pi}{4} < A < \frac{3\pi}{2}$. On en déduit que :

$$A = \frac{5\pi}{4}$$

7 ★ Trouver tous les réels x et y tels que : $\begin{cases} x + e^x = y + e^y \\ x^2 + xy + y^2 = 27 \end{cases}$

Corrigé : Intéressons-nous d'abord à la première équation, la fonction $f : x \mapsto x + e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions usuelles strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. On en déduit qu'elle est injective, ainsi la première équation implique que $x = y$. La seconde équation devient : $3x^2 = 27$ donc $x = 3$ ou $x = -3$.

$$\mathcal{S} = \{(3, 3), (-3, -3)\}$$

8 ★ Trouver tous les réels x tels que $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x^3) = \frac{3\pi}{4}$.

Corrigé : Le membre de gauche est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$. On procède par analyse-synthèse.

Analyse : Soit x une solution de l'équation, en prenant la fonction tangente, on obtient :

$$\tan(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x^3)) = -1 \Leftrightarrow \frac{x + x^3}{1 - x^4} = -1$$

Or $\frac{x + x^3}{1 - x^4} = \frac{x(1 + x^2)}{(1 - x^2)(1 + x^2)} = \frac{x}{1 - x^2}$ On obtient donc $\frac{x}{1 - x^2} = -1$, ce qui donne l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$. Cette équation possède deux solutions :

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Synthèse : Soit $f : x \mapsto \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x^3)$ définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\pi$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pi$. Ainsi f réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $] -\pi, \pi[$ et on peut affirmer que l'équation $f(x) = \frac{3\pi}{4}$ admet une unique solution. De plus cette solution est positive car $f(0) = 0$.

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

9 ★ Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arccos}(\text{th}(x)) + 2\text{Arctan}(e^x) = \pi$$

Corrigé : On pose $f : x \mapsto \text{Arccos}(\text{th}(x)) + 2\text{Arctan}(e^x) = \pi$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car Arctan , $\exp$ et th sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et th est à valeurs dans $] -1, 1[$, ensemble sur lequel Arccos est définie et dérivable.

On va démontrer que la dérivée de f est nulle ainsi la fonction f sera constante.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= -\frac{1 - \text{th}^2(x)}{\sqrt{1 - \text{th}^2(x)}} + 2\frac{e^x}{1 + e^{2x}} \\ &= -\sqrt{1 - \text{th}^2(x)} + \frac{2e^x}{e^x(e^{-x} + e^x)} \\ &= -\sqrt{\frac{1}{\text{ch}^2(x)}} + \frac{1}{\text{ch}(x)} \\ &= -\frac{1}{|\text{ch}(x)|} + \frac{1}{\text{ch}(x)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

La dernière simplification étant correcte car la fonction ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $|\text{ch}| = \text{ch}$.

On en déduit que f est constante sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0) = \text{Arccos}(\text{th}(0)) + 2\text{Arctan}(e^0) = \text{Arccos}(0) + 2\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{2} + 2 \times \frac{\pi}{4} = \pi$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arccos}(\text{th}(x)) + 2\text{Arctan}(e^x) = \pi$$

10 ★ Trouver tous les réels x tels que : $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x) = 0$.

Corrigé : Notons (E) l'équation. On va réorganiser les termes et utiliser la formule :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow (\cos(x) + \cos(4x)) + (\cos(2x) + \cos(3x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \cos\left(\frac{5}{2}x\right) \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + 2 \cos\left(\frac{5}{2}x\right) \cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \cos\left(\frac{5}{2}x\right) \times \left(\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4 \cos\left(\frac{5}{2}x\right) \cos(x) \cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{2}x = \frac{\pi}{2} [\pi] \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} [\pi] \text{ ou } \frac{1}{2}x = \frac{\pi}{2} [\pi] \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5} \left[\frac{2\pi}{5}\right] \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} [\pi] \text{ ou } x = \pi [2\pi] \end{aligned}$$