A-Préliminaires

1. (a) On considère l'hypothèse suivante que l'on va démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}_n \; : \; "u_n \in J"$$

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a $u_0 \in J$ par hypothèse.
- **Hérédité.** On suppose que $u_n \in J$ pour un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ fixé.
  On a $u_{n+1} = f(u_n) \in J$ car $f(J) \subset J$. On en déduit que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. Ce qui termine la récurrence.

$$\boxed{\text{Si } u_0 \in J \text{ alors pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in J}$$

(b) C'est immédiat d'après la question précédente, si $u_0 \in J$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in J$ et si J est borné alors (u_n) également.

$$\boxed{(u_n) \text{ est bornée}}$$

(c) La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. De plus $f' : x \mapsto -\dfrac{1}{(x-1)^2}$ est strictement négative sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. On en déduit que f est décroissante sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. En particulier, la fonction f étant continue, on a :

$$f\left(\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right), \lim_{x \to -\infty} f(x)\right[= [-2, 0[\subset \left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$$

$$\boxed{\left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \text{ est stable par } f}$$

On en déduit, d'après la question (a), que comme $u_0 \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$. Ainsi la suite (u_n) est correctement définie puisqu'elle évite la valeur 1.

$$\boxed{(u_n) \text{ est correctement définie}}$$

2. (a) On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \in I$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$ car (u_{n+1}) est une suite extraite de (u_n).
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$ et en passant à la limite dans cette relation, nous obtenons $l = f(l)$. En effet, on a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l)$ grâce à la continuité de f en $l \in I$.

$$\boxed{\text{Si } (u_n) \text{ converge, c'est vers un point fixe de } f}$$

(b) i. On pose $g : x \mapsto f(x) - x$ définie et continue sur $[a, b]$ car f l'est. On a $g(a) = f(a) - a \geq 0$ car $f(a) \in [a, b]$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$ car $f(b) \in [a, b]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$. Or $g(c) = 0$ équivaut à $f(c) = c$.

$$\boxed{f \text{ a un point fixe}}$$

ii. Le résultat n'est plus vérifié dans ce cas. Si l'on prend par exemple $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}x$ définie sur $]0, 1]$ et à valeurs dans $]0, 1]$, la fonction f est bien continue mais ne possède pas de point fixe dans l'intervalle $]0, 1]$ puisque son seul point fixe sur $\mathbb{R}$ est 0.

iii. C'est faux également, la fonction $f : x \mapsto x+1$ définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ n'a clairement pas de point fixe.

(c) i. L'ensemble A est inclus dans $\mathbb{R}$, non vide car $0 \in A$ puisque $f(0) \geq 0$ et majoré par 1. D'après la propriété de la borne supérieure :

$$\boxed{A \text{ admet une borne supérieure } x_0 \in [0,1]}$$

ii. Soit $x \in A$, on a $x \leq x_0$ car x_0 est un majorant de A. Par croissance de f, on obtient $f(x) \leq f(x_0)$, or $x \in A$ donc $x \leq f(x)$. En combinant les deux inégalités, on en déduit que : $x \leq f(x_0)$.

$$\boxed{f(x_0) \text{ est un majorant de } A}$$

Or x_0 est le plus petit majorant de A, d'où :

$$\boxed{x_0 \leq f(x_0)}$$

iii. On suppose que $x_0 < f(x_0)$, par croissance de f, il vient : $f(x_0) \leq f(f(x_0))$ ainsi $f(x_0) \in A$: c'est contradictoire car $f(x_0) > x_0$ avec x_0 qui est un majorant de A. On en déduit que $x_0 \geq f(x_0)$ et d'après la question précédente : $x_0 \leq f(x_0)$. Finalement $f(x_0) = x_0$.

$$\boxed{x_0 \text{ est un point fixe de } f}$$

iv. C'est faux pour une fonction décroissante :

$$\begin{array}{rccl} f & : & [0,1] & \to & [0,1] \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \end{array}$$

3. Si f est une fonction affine, la suite (u_n) est définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$

On reconnait alors une suite arithmético-géométrique et on distingue les cas suivants :

- Si $a = 1$, la suite est arithmétique et on sait alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nb$.
  - ▶ Si $b = 0$, la suite (u_n) est constante égale à u_0, elle converge vers u_0.
  - ▶ Si $b > 0$, la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
  - ▶ Si $b < 0$, la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.
- Si $a \neq 1$, on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{b}{1-a} + \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n$$

  - ▶ Si $u_0 = \dfrac{b}{1-a}$ alors la suite (u_n) converge vers $\dfrac{b}{1-a}$.
  - ▶ Si $|a| < 1$, la suite (u_n) converge également vers $\dfrac{b}{1-a}$.

▶ Si $u_0 \neq \dfrac{b}{1-a}$ et $a > 1$, la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de $u_0 - \dfrac{b}{1-a}$.

▶ Si $u_0 \neq \dfrac{b}{1-a}$ et $a \leq -1$, la suite (u_n) diverge.

B-Cas où f est croissante

1. (a) On considère l'hypothèse suivante que l'on va démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}_n \ : \ u_n \leq u_{n+1}$$

• **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a $u_0 \leq u_1$ par hypothèse.

• **Hérédité.** On suppose que $u_n \leq u_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.
Par croissance de f, on obtient $f(u_n) \leq u_{n+1}$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n+2}$ ce qui constitue bien l'hypothèse de récurrence au rang $n+1$. Ceci termine la récurrence.

$$\boxed{\text{Si } u_0 \leq u_1 \text{ alors la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$$

(b) On considère l'hypothèse suivante que l'on va démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}_n \ : \ u_n \geq u_{n+1}$$

• **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a $u_0 \geq u_1$ par hypothèse.

• **Hérédité.** On suppose que $u_n \geq u_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.
Par croissance de f, on obtient $f(u_n) \geq u_{n+1}$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq u_{n+2}$ ce qui constitue bien l'hypothèse de récurrence au rang $n+1$. Ceci termine la récurrence.

$$\boxed{\text{Si } u_0 \geq u_1 \text{ alors la suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$$

(c) i. On a $g(u_0) = f(u_0) - u_0 = u_1 - u_0$ d'après les deux questions précédentes, le signe de $u_1 - u_0$ nous indique la monotonie de la suite (u_n). Plus précisément si $g(u_0) \geq 0$, la suite (u_n) est croissante, d'après la question (a) et si $g(u_0) \leq 0$, la suite (u_n) est décroissante, d'après la question (b).

ii. Dans la question 2.(a) de la partie A, nous avons vu que si la suite (u_n) converge c'est vers un point fixe de f lorsque f est continue, ce qui est le cas ici. Or les points fixes de f sont les zéros de g puisque pour tout $x \in I$:

$$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

2. (a) La fonction f est clairement positive, continue car polynomiale sur $\mathbb{R}_+$. De plus $x \mapsto x^2$ croit sur $\mathbb{R}_+$ donc f est également croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\boxed{f \text{ est continue et croissante sur } \mathbb{R}_+}$$

(b) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a $g(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - x + 1 = \left(\dfrac{1}{2}x - 1\right)^2 \geq 0$. Au vu de cette forme factorisée, on a bien 2 qui est le seul zéro de g sur $\mathbb{R}_+$.

$$\boxed{g \text{ est positive et s'annule en } 2}$$

(c) i. Par croissance et par continuité de f, on a $f([0,2]) = [f(0), f(2)] = [1,2] \subset [1,2]$.

$$\boxed{[0,2] \text{ est un intervalle stable par } f}$$

Or $u_0 \in [0,2]$, ainsi d'après la question 1.(a) de la partie A, nous savons que (u_n) est une suite de l'intervalle $[0,2]$. En particulier :

$$\boxed{(u_n) \text{ est bornée}}$$

ii. La fonction g est positive sur $\mathbb{R}_+$ donc d'après la question 1.(c).i., nous savons que (u_n) est croissante.

$$\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$$

iii. D'après le théorème de la limite monotone, la suite (u_n) étant croissante et majorée, elle converge. Sa limite est donc un point fixe de f sur l'intervalle $[0,2]$, c'est-à-dire un zéro de g. Or le seul point d'annulation de g est 2.

$$\boxed{\text{Si } u_0 = 1 \text{ alors la suite } (u_n) \text{ converge vers } 2}$$

(d) i. Toujours par croissance et continuité de f, on a : $f([2,+\infty[) = [f(2), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [2,+\infty[$.

$$\boxed{[2,+\infty[\text{ est un intervalle stable par } f}$$

ii. Toujours grâce à la positivité de la fonction g sur $[2,+\infty[$, on sait que (u_n) est croissante.

iii. Par l'absurde, supposons que la suite (u_n) soit majorée, étant croissante, elle converge nécessairement vers un point fixe de f. Le seul point fixe de f sur $\mathbb{R}_+$ est 2, ainsi (u_n) converge vers 2. Or par croissance de f, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \geq u_0 = \dfrac{5}{2}$ et en passant à la limite dans cette relation, nous obtenons $2 \geq \dfrac{5}{2}$: ce qui est contradictoire. Ainsi la suite croissante (u_n) n'est pas majorée, c'est donc qu'elle diverge vers $+\infty$.

$$\boxed{\text{Si } u_0 = \frac{5}{2} \text{ alors la suite } (u_n) \text{ diverge vers } +\infty}$$

3. (a) Remarquons d'abord que l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ a pour discrimimant : $\Delta = 5$, elle possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Seul le réel x_1 est positif, on note :

$$\boxed{\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

On peut démontrer par une récurrence immédiate que pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}_n \ : \ u_n \geq 0$$

- **Initialisation.** On a bien $u_0 = 1 \geq 0$.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n \geq 0$ alors $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ est bien défini et $u_{n+1} \geq 0$. Ce qui démontre que $\mathcal{H}_n$ est vraie et termine la récurrence.

$$\boxed{(u_n) \text{ est bien définie}}$$

(b) Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\mathcal{H}_n \ : \ u_n \in [0, \varphi]$$

• **Initialisation.** On a : $u_0 = 1 \in [0, \varphi]$ puisque $\varphi \approx 1.618$.

• **Hérédité.** Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que $u_n \in [0, \varphi]$. Par croissance et continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que :

$$u_{n+1} = f(u_n) \in f([0, \varphi]) = [f(0), f(\varphi)] = [1, \varphi] \subset [0, \varphi]$$

En effet, $f(\varphi) = \sqrt{1+\varphi} = \sqrt{\varphi^2} = \varphi$. Ce qui démontre que $\mathcal{H}_n$ est vraie et achève la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \in [0, \varphi]}$$

(c) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ comme composée des fonctions $x \mapsto 1+x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ qui sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$ et sur $[1, +\infty[$. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\mathcal{H}_n \ : \ u_{n+1} \geq u_n$$

• **Initialisation.** On a : $u_1 = \sqrt{2} \geq u_0 = 1$.

• **Hérédité.** Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que $u_{n+1} \geq u_n$, en appliquant la fonction f qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a : $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$, c'est-à-dire $u_{n+2} \geq u_{n+1}$. Ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et achève la récurrence.

$$\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$$

(d) D'après les questions (b) et (c), la suite (u_n) est croissante et majorée par φ. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que (u_n) converge.

$$\boxed{(u_n) \text{ est convergente}}$$

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{1+x} = x \Leftrightarrow 1+x = x^2 \Leftrightarrow x = \varphi$$

$$\boxed{\text{Le seul point fixe de } f \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ est } \varphi}$$

D'après la question (d), notons l la limite de (u_n). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$. En passant à la limite dans l'égalité et par continuité de f, on en déduit que $l = f(l)$ puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$. Ainsi l est un point fixe de f sur $\mathbb{R}_+$, d'après la question précédente, il n'y a pas le choix : la suite converge vers φ.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \varphi}$$

C-Cas où f est décroissante

1. (a) La fonction f est définie sur I et à valeurs dans I ainsi $h = f \circ f$ est bien définie sur I. De plus, la composée de deux fonctions décroissantes et une fonction croissante.

$$\boxed{f \circ f \text{ est croissante sur } I}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(f(u_{2n})) = h(u_{2n})$ et $u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3} = f(f(u_{2n+1})) = h(u_{2n+1})$. Comme la fonction h est croissante, d'après la partie B, on sait que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{2n} \leq u_{2n+2} \Rightarrow u_{2n+1} \geq u_{2n+3}$$

ceci en appliquant la fonction f qui est décroissante. Ainsi lorsque (u_{2n}) est croissante, on a (u_{2n+1}) décroissante. On procède de même pour démontrer que si (u_{2n}) est décroissante alors (u_{2n+1}) est croissante.

$$\boxed{(u_{2n}) \text{ et } u_{2n+1} \text{ sont monotones de sens de variation opposés}}$$

2. (a) On démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\mathcal{H}_n \ : \ u_n \geq 0$$

• **Initialisation.** On a $u_0 \in [0, \sqrt{5}]$ donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.

• **Hérédité.** Si l'on suppose que $u_n \geq 0$ pour un entier naturel n fixé, on a : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 5}{u_n + 1} \geq 0$.

Ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et termine la récurrence.

On en déduit que la suite (u_n) est bien définie puisqu'aucun terme de la suite ne prend la valeur -1.

$$\boxed{(u_n) \text{ est bien définie}}$$

(b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ f'(x) = \frac{(x+1) - (x+5)}{(x+1)^2} = \frac{-4}{(x+1)^2} < 0$$

$$\boxed{f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+}$$

(c) Il convient tout d'abord d'expliciter la fonction g. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$g(x) = f(f(x)) - x = \frac{\frac{x+5}{x+1} + 5}{\frac{x+5}{x+1} + 1} - x = \frac{x + 5 + 5(x+1)}{x + 5 + x + 1} - x = \frac{6x + 10}{2x + 6} - x = \frac{-2x^2 + 10}{2x + 6} = \frac{5 - x^2}{x + 3}$$

On en déduit le signe de g sur $\mathbb{R}_+$: g est positive sur $[0, \sqrt{5}]$ et négative sur $[\sqrt{5}, +\infty[$, elle s'annule en $x = \sqrt{5}$.

En particulier :

$$\boxed{\text{l'unique point fixe de } f \circ f \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ est } \sqrt{5}}$$

(d) On sait que l'application $f \circ f$ est croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$ ainsi en utilisant les calculs menés à la question précédente qui donnent une formule pour $f \circ f$, on a :

$$f \circ f([0, \sqrt{5}]) = [f(f(0)), f(f(\sqrt{5}))] = \left[\frac{5}{3}, \sqrt{5}\right] \subset [0, \sqrt{5}]$$

$$\boxed{[0, \sqrt{5}] \text{ est stable par } f \circ f}$$

(e) La suite (u_{2n}) est associée à la fonction $f \circ f$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$. L'intervalle $[0, \sqrt{5}]$ est stable par $f \circ f$ et $u_0 \in [0, \sqrt{5}]$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in [0, \sqrt{5}]$. En particulier, la suite (u_{2n}) est majorée, de plus elle est croissante car la fonction g est positive sur $[0, \sqrt{5}]$. D'après le théorème de la limite monotone, toute suite croissante et majorée converge, nécessairement vers un point fixe de $f \circ f$, c'est-à-dire vers $\sqrt{5}$ qui est le seul point fixe de $f \circ f$ sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question (c).

$$\boxed{(u_{2n}) \text{ converge vers } \sqrt{5}}$$

(f) On a $u_0 \in [0, \sqrt{5}]$ et $u_1 = f(u_0)$. Or $f([0, \sqrt{5}]) = [f(\sqrt{5}), f(0)] = [\sqrt{5}, 5]$ ceci par continuité et par décroissance de f.

$$\boxed{u_1 \in [\sqrt{5}, +\infty[}$$

L'intervalle $[\sqrt{5}, +\infty[$ est stable par $f \circ f$ car $f \circ f([\sqrt{5}, +\infty[) = [\sqrt{5}, 3[\subset [\sqrt{5}, +\infty[$. Comme $u_1 \in [\sqrt{5}, +\infty[$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+3} \in [\sqrt{5}, +\infty[$.
La suite (u_{2n+1}) est minorée, décroissante car la fonction g est négative sur $[\sqrt{5}, +\infty[$, on en déduit que (u_{2n+1}) converge vers l'unique point fixe de $f \circ f$, c'est-à-dire $\sqrt{5}$.

$$\boxed{(u_{2n+1}) \text{ converge vers } \sqrt{5}}$$

(g) Il reste à utiliser le théorème de recollement pour affirmer à l'aide des deux questions précédentes que :

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \sqrt{5}}$$

(h) Si $u_0 \in [\sqrt{5}, +\infty[$, on vérifie que $u_1 \in [0, \sqrt{5}]$ et ce cas est identique au précédent en échangeant le rôle des suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). On a également :

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \sqrt{5}}$$

D-Cas où f est lipschitzienne

1. (a) Fixons $b \in I$. Pour démontrer que f est continue en b, il s'agit de vérifier que $\lim\limits_{x \to b} f(x) = f(b)$. Or d'après propriété portant sur la fonction f, on sait que :

$$\forall x \in I, \ |f(x) - f(b)| \leq k|x - b|$$

On a $\lim\limits_{x \to b} k|x - b| = 0$ donc $\lim\limits_{x \to b} |f(x) - f(b)| = 0$, ce qui signifie bien que $\lim\limits_{x \to b} f(x) = f(b)$.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } I}$$

(b) i. Démontrons la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}_n \;:\; |u_n - a| \leq k^n |u_0 - a|$$

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, la formule devient : $|u_0 - a| \leq |u_0 - a|$. On en déduit que $\mathcal{H}_0$ est vérifiée.
- **Hérédité.** On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie pour un entier naturel n fixé. On a :

$$|u_{n+1} - a| = |f(u_n) - f(a)| \leq k|u_n - a| \leq k \times k^n |u_0 - a| = k^{n+1}|u_0 - a|$$

Ceci en utilisant la définition de f k-lipschitzienne et l'hypothèse de récurrence.
On a démontré que $\mathcal{H}_n$ est vraie, ce qui termine la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - a| \leq k^n |u_0 - a|}$$

ii. On passe à la limite dans l'inégalité précédente car comme $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = 0$ puisque $k \in [0, 1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n |u_0 - a| = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = a}$$

iii. La fonction f possède au plus un point fixe car sinon la suite (u_n) définie ci-dessus possèderait deux limites, ce qui est absurde par unicité de la limite.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ poosède au plus un point fixe}}$$

2. (a) On démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\mathcal{H}_n \;:\; u_n \geq 0$$

- **Initialisation.** On a $u_0 \in \mathbb{R}_+$ donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- **Hérédité.** Si l'on suppose que $u_n \geq 0$ pour un entier naturel n fixé, on a : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 + u_n} \geq 0$.

Ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et termine la récurrence.
On en déduit que la suite (u_n) est bien définie puisqu'aucun terme de la suite ne prend la valeur -2.

$$\boxed{(u_n) \text{ est bien définie}}$$

(b) Vérifions la définition, on se donne $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a :

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2+y}\right| = \left|\frac{y - x}{(2+x)(2+y)}\right| \leq \left|\frac{y-x}{2\times 2}\right| = \frac{1}{4}|x - y|$$

$$\boxed{f \text{ est } \frac{1}{4} - \text{lipschitzienne}}$$

(c) D'après l'étude menée à la question 1., on en déduit que (u_n) converge vers l'unique point fixe de f sur $\mathbb{R}_+$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2+x} = x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{2}$$

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } -1 + \sqrt{2}}$$

E-Cas où f est une homographie

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $y \in \mathbb{R}$, on procède par équivalences :

$$y = \frac{x+1}{x} \Leftrightarrow xy = x+1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{y-1}$$

En effet, on voit que $y \neq 1$ grâce à la relation $xy = x+1$.
Ceci démontre que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et :

$$\boxed{f^{-1} : y \mapsto \frac{1}{y-1}}$$

(b) i. • Si $u_0 = x_0 = 0$, il est clair que l'on ne peut pas calculer u_1 car $u_1 = \dfrac{u_0+1}{u_0}$.

• On a $x_1 = f^{-1}(x_0) = f^{-1}(0) = -1$. Si $u_0 = -1$ alors $u_1 = f(u_0) = 0$ et on ne pourra pas calculer u_2.

ii. On suppose que la suite (u_n) n'est pas bien définie, cela équivaut à dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k = 0$. On applique k fois la fonction f^{-1} à cette relation pour obtenir $u_0 = x_k$ comme voulu et cette opération préserve notre raisonnement par équivalences car on peut appliquer k fois f pour revenir à la relation de départ.

$$\boxed{(u_n) \text{ n'est pas bien définie si et seulement si il existe } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_0 = x_k}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+2} = \frac{au_{n+1}+b}{cu_{n+1}+d} = \frac{a\frac{au_n+b}{cu_n+d}+b}{c\frac{au_n+b}{cu_n+d}+d} = \frac{a(au_n+b)+b(cu_n+d)}{c(au_n+b)+d(cu_n+d)} = \frac{(a^2+bc)u_n+ab+bd}{(ac+dc)u_n+bc+d^2}$$

Or, par hypothèse, $bc = ad$ ainsi $a^2+bc = a(a+d)$ et $bc+d^2 = d(a+d)$. En reprenant le calcul :

$$u_{n+2} = \frac{a(a+d)u_n+b(a+d)}{c(a+d)u_n+d(a+d)} = \frac{au_n+b}{cu_n+d} = u_{n+1}$$

On vient de démontrer que pour tout $n \geq 0$, on a $u_{n+2} = u_{n+1}$.

$$\boxed{(u_n) \text{ est constante à partir du rang 1}}$$

3. Si $c = 0$ alors pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = \dfrac{a}{d}u_n + \dfrac{b}{d}$.

$$\boxed{\text{Si } c = 0 \text{ alors } (u_n) \text{ est une suite arithmético-géométrique}}$$

4. Par définition de la suite (u_n), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(cu_n+d)u_{n+1} = au_n+b$. Si l'on suppose que (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ alors en passant à la limite dans l'égalité précédente, on a :

$$(cl+d)l = al+b \Leftrightarrow cl^2+(d-a)l-b = 0$$

$$\boxed{\text{Si } (u_n) \text{ converge vers } l \in \mathbb{R} \text{ alors } cl^2+(d-a)l-b = 0}$$

5. (a) Les deux solutions α et β de l'équation (E) sont les points fixes de la fonction f. Si, par exemple, $u_0 = \alpha$ alors $u_1 = f(u_0) = f(\alpha) = \alpha$ et par une récurrence immédiate (u_n) est constante égale à α. De même si $u_0 = \beta$.

$$\boxed{\text{Si } u_0 \in \{\alpha, \beta\} \text{ alors la suite est constante}}$$

(b) i. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \frac{\frac{au_n+b}{cu_n+d} - \alpha}{\frac{au_n+b}{cu_n+d} - \beta} = \frac{(a - c\alpha)u_n + b - d\alpha}{(a - c\beta)u_n + b - d\beta}$$

Or d'après les relations entre les coefficients et les solutions d'une équation de degré 2, ici l'équation (E), on a $\alpha + \beta = \dfrac{a-d}{c}$ et $\alpha\beta = -\dfrac{b}{c}$. En particulier avec la première relation, on a : $c\alpha + c\beta = a - d$. Ainsi :

$$a - c\alpha = c\beta + d$$

$$b - d\alpha = -c\alpha\beta - d\alpha = -\alpha(c\beta + d)$$

et de même :

$$a - c\beta = c\alpha + d$$

$$b - d\beta = -\beta(c\alpha + d)$$

En reprenant le calcul, on a :

$$v_{n+1} = \frac{(c\beta + d)u_n - \alpha(c\beta + d)}{(c\alpha + d)u_n - \beta(c\alpha + d)} = \frac{c\beta + d}{c\alpha + d} \times \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = \frac{c\beta + d}{c\alpha + d} v_n$$

$$\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } q = \frac{c\beta + d}{c\alpha + d}}$$

ii. • Déjà remarquons que $q \neq 1$ car $\alpha \neq \beta$ donc $c\beta + d \neq c\alpha + d$.

• Si $q = -1$ alors la suite (v_n) oscille entre les deux valeurs v_0 et v_1 donc (u_n) prend également les deux valeurs u_0 et u_1 alternativement.

• Si $|q| < 1$ alors (v_n) converge vers 0. La relation $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ est équivalente à

$$u_n = \frac{\alpha - \beta v_n}{1 - v_n} \quad (\bigstar)$$

cette relation étant bien définie à partir d'un certain rang car (v_n) ne prend pas une infinité de fois la valeur 1 comme elle converge vers 0. Ainsi (u_n) converge vers α.

• Si $q > 1$ alors (v_n) diverge vers $+\infty$ et la relation $(\bigstar)$ montre que (u_n) converge vers β.

• Enfin, si $q < -1$, la suite (v_n) n'a pas de limite mais cependant $(|v_n|)$ tend vers $+\infty$ ainsi toujours avec la relation $(\bigstar)$, on en déduit que (u_n) converge vers β également.

iii. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \frac{\alpha - \beta v_n}{1 - v_n} = \frac{\alpha - \beta v_0 q^n}{1 - v_0 q^n}$$

avec $q = \dfrac{c\beta + d}{c\alpha + d}$ et $v_0 = \dfrac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$.

On ne prête pas attention au dénominateur qui ne s'annule pas implicitement puisque l'on a supposé que (u_n) est bien définie.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{\alpha - \beta v_0 q^n}{1 - v_0 q^n}}$$

6. (a) L'unique solution d'une équation polynomiale du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $\Delta = 0$ est $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$. Ici cela donne :

$$\boxed{\alpha = \frac{a-d}{2c}}$$

De cette relation, on déduit directement :

$$\boxed{c\alpha + d = a - c\alpha}$$

(b) Comme à la question 5.(a) :

$$\boxed{\text{Si } u_0 = \alpha \text{ alors } (u_n) \text{ est constante}}$$

(c) i. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1} - \alpha} \\
&= \frac{1}{\frac{au_n+b}{cu_n+d} - \alpha} \\
&= \frac{cu_n + d}{(a - c\alpha)u_n + b - \alpha d} \\
&= \frac{cu_n + d}{(a - c\alpha)(u_n - \alpha)} \qquad \text{car } c\alpha^2 + (d-a)\alpha - b = 0 \text{ donc } b - d\alpha = -\alpha(a - c\alpha) \\
&= \frac{c(u_n - \alpha) + c\alpha + d}{(a - c\alpha)(u_n - \alpha)} \\
&= \frac{c}{a - c\alpha} + \frac{c\alpha + d}{(a - c\alpha)(u_n - \alpha)} \\
&= \frac{c}{a - c\alpha} + \frac{1}{u_n - \alpha} \qquad \text{car } c\alpha + d = a - c\alpha \\
&= \frac{c}{a - c\alpha} + v_n
\end{aligned}$$

On a démontré que (v_n) est une suite arithmétique de raison :

$$r = \frac{c}{a - c\alpha} = \frac{c}{a - \frac{a-d}{2}} = \frac{2c}{a+d}$$

De plus, $r \neq 0$ car $c \neq 0$ et on a bien $a+d \neq 0$ car :

$$(a+d)^2 = (a-d)^2 + 4ad = -4bc + 4ad = 4(ad-bc) \neq 0$$

$$\boxed{(v_n) \text{ est arithmétique de raison } r = \frac{2c}{a+d}}$$

ii. Comme la raison r n'est pas nulle, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ selon le signe de r. Dans les deux cas, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha}$$

iii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \alpha + \dfrac{1}{v_n}$ car $v_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$ ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha + \frac{1}{v_0 + nr}}$$

avec $r = \dfrac{2c}{a+d}$ et $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - \alpha}$.

7. L'équation (E) devient dans notre cas : $l^2 + l = 0$, il y a deux solutions $\alpha = -1$ et $\beta = 0$, on est donc dans le cadre de la question 5. On pose :

$$v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = \frac{u_n}{u_n + 1} = 1 + \frac{1}{u_n}$$

D'après la question 5., (v_n) est géométrique de raison 2 et $v_0 = 2$ ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^{n+1}$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{1}{2^{n+1} - 1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{2^{n+1} - 1}}$$