

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_1^e \frac{(\ln(x))^n}{x^2} dx$$

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et calculer u_0 .

2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \int_0^1 t^n e^{-t} dt$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $A_n = \int_0^1 t^n dt$.

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

(d) Déterminer la limite de (u_n) .

3. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (n+1)u_n - \frac{1}{e}$.

(b) En déduire la valeur de u_1 .

4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $b_n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $u_n = n! - \frac{b_n}{e}$.

(b) Déterminer les limites des suites (b_n) , $\left(\frac{b_n}{n!}\right)$ et $\left(\frac{n!}{b_n}\right)$.

Pour la question 5., on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = 1 + (n+1)b_n$.

5. (a) Préciser les valeurs de b_0 , b_1 et b_2 .

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

(c) En déduire que pour tout $n \geq 2$, $b_n \geq 2 \times n!$.

(d) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $0 \leq \frac{n!}{b_n} - \frac{1}{e} \leq \frac{1}{2 \times (n+1)!}$.

(e) En remarquant que pour $n = 4$, on a $2 \times (n+1)! > 100$, déterminer un rationnel qui donne une approximation de $\frac{1}{e}$ à 10^{-2} près.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0, \pi]$ par $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{5 - 4 \cos x}}$. Le but de l'exercice est de trouver une expression de la bijection réciproque de f restreinte à $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

1. (a) Vérifier que f est définie sur I .
 (b) Etudier le signe de $f(x) - \sin x$ sur l'intervalle I .
 (c) Montrer que : $\forall x \in]0, \pi], \sin x < x$.
 (d) En déduire les solutions de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle I .
2. Etudier les variations de f sur l'intervalle I , calculer $f(\pi/3)$, $f'(0)$ et $f'(\pi)$ et tracer son graphe. On pourra écrire $f'(x)$ sous la forme $\frac{\alpha(\cos(x) - \beta)(\cos(x) - \gamma)}{(5 - 4 \cos(x))^{\frac{3}{2}}}$ où α , β et γ sont des réels à déterminer.
3. On considère la fonction g définie sur I par :

$$g(x) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{4 - 5 \cos x}{5 - 4 \cos x}\right)$$

- (a) Etudier les variations de la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \varphi & : & [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ & & t \mapsto \frac{4 - 5t}{5 - 4t} \end{array}$$

En déduire que φ réalise une bijection de $[-1, 1]$ dans un intervalle à déterminer.

- (b) Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]0, \pi[$ et calculer sa dérivée que l'on simplifiera au maximum en l'écrivant sous la forme $g'(x) = \frac{\delta}{5 - 4 \cos(x)}$ où δ est une constante réelle à préciser.
- (c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \pi} g'(x)$. On admet que cela implique que g est dérivable en 0 et en π avec $g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} g'(x)$ et $g'(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi} g'(x)$.
4. Dans cette question $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.
- (a) Montrer qu'il existe un unique $z \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ tel que $f(x) = f(z)$.
- (b) Calculer $\cos(g(x))$ et $\sin(g(x))$.
- (c) Calculer $f(g(x))$ et en déduire que $z = g(x)$.
- (d) En déduire des expressions simplifiées de $\cos(x + z)$ et $\cos(x - z)$.
- (e) Etudier les variations des fonctions :

$$\begin{array}{ccc} \varphi_1 & : & \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \rightarrow \mathbb{R} \\ & & t \mapsto t + g(t) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \varphi_2 & : & \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \rightarrow \mathbb{R} \\ & & t \mapsto t - g(t) \end{array}$$

et en déduire le signe de $\cos\left(\frac{x+z}{2}\right)$ et de $\cos\left(\frac{x-z}{2}\right)$.

- (f) Exprimer $\cos\left(\frac{x+z}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{x-z}{2}\right)$ en fonction de $f(x)$.
5. (a) Prouver que la restriction de f à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ est bijective à valeurs dans un intervalle J à préciser. On notera h sa bijection réciproque.
- (b) Expliciter la fonction h .