

Exercice 1 : Autour de la fonction indicatrice

Soit E un ensemble non vide, pour toute partie A de E , on considère la fonction $\mathbb{1}_A$ définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : E &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

Cette fonction $\mathbb{1}_A$ est appelée fonction caractéristique de A . On notera dans la suite du problème $\bar{A} = C_E A$ le complémentaire de A dans E .

1. Tracer la fonction $\mathbb{1}_A$ dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}$ et $A = [-4, -1] \cup [1, 5]$.
2. Expliciter les fonctions $\mathbb{1}_E$ et $\mathbb{1}_\emptyset$.
3. Démontrer les formules suivantes avec A et B des parties de E :

- (a) $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$.
- (b) $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$.
- (c) $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.
- (d) $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.
- (e) $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
- (f) $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
- (g) $\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B)$.

On rappelle que deux fonctions sont égales si et seulement si elles coïncident en tous les éléments de E .

4. On définit la différence symétrique de deux parties A et B de E par : $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$.
 - (a) Montrer que : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
 - (b) Préciser $A \Delta E$ et $A \Delta \emptyset$.
 - (c) Vérifier que $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$. Comparer $A \Delta B$ et $\bar{A} \Delta \bar{B}$.
 - (d) Montrer que $\mathbb{1}_{A \Delta B} = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2$.
 - (e) Soit A, B, C trois sous-ensembles de E , en utilisant la propriété démontrée à la question précédente et les questions 3.(a) et 3.(c), montrer que $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.
5. On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathcal{P}(E) &\rightarrow \mathcal{F}(E, \{0, 1\}) \\ A &\mapsto \mathbb{1}_A \end{aligned}$$

Montrer que Γ est une bijection.

6. Soit F un deuxième ensemble, B une partie de F et $f : E \rightarrow F$ une application. Montrer que :

$$\mathbb{1}_{f^{-1}(B)} = \mathbb{1}_B \circ f$$

Exercice 2 : Quelques bijections

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques bijections mettant en jeu l'ensemble \mathbb{N} . La plupart des questions peuvent être traitées séparément.

1. Donner deux bijections de \mathbb{N} vers \mathbb{N}^* .
2. Montrer que l'application f suivante est une bijection entre \mathbb{N} et \mathbb{Z} :

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

3. On considère l'application g suivante :

$$g: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(k, n) \mapsto 2^k(2n+1) - 1$$

- (a) Montrer que tout nombre entier non nul s'écrit sous la forme $2^k(2n+1)$ où n et k sont des entiers naturels.
 - (b) Soit $m \in \mathbb{N}$, montrer que m admet un antécédent par g .
 - (c) Montrer que g est injective.
 - (d) En déduire que g est une bijection.
4. Démontrer qu'il existe une bijection entre \mathbb{N}^p et \mathbb{N} où p est un entier non nul. On pourra raisonner par récurrence et utiliser l'application g définie à la question précédente. On ne cherchera pas à donner une formule explicite pour cette bijection.
 5. Donner une bijection entre \mathbb{N} et \mathbb{Q} . On n'ambitionnera pas de donner une démonstration rigoureuse ou une formule explicite mais une description détaillée suffira.
 6. Le but de cette question est de démontrer qu'il n'y a pas de bijection de \mathbb{N} dans \mathbb{R} . Par l'absurde, on se donne une bijection de \mathbb{N} dans \mathbb{R} que l'on note φ .
 - (a) Soient $(a, b, x) \in \mathbb{R}^3$ tels que $a < b$. Démontrer que l'on peut trouver $(a', b') \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \leq a' < b' \leq b$ et $x \notin [a', b']$.
 - (b) On construit par récurrence deux suites (a_n) et (b_n) de la façon suivante :
 - $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$
 - pour un entier naturel n fixé, on suppose avoir défini a_n et b_n et on choisit a_{n+1} et b_{n+1} tels que :

$$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \text{ et } \varphi(n) \notin [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

Montrer qu'il est possible de définir ainsi a_{n+1} et b_{n+1} .

- (c) Montrer que (a_n) et (b_n) convergent. On notera λ et μ les limites respectives.
 - (d) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq \lambda \leq b_n$.
 - (e) En déduire une absurdité et conclure.
7. Le but de cette question est de démontrer que \mathbb{N} n'est pas en bijection avec $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$. Par l'absurde, on se donne $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ une bijection. Utiliser la fonction suivante pour trouver une absurdité puis conclure :

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto \varphi(n)(n) + 1$$