1-Le produit de deux suites minorées est-elle une suite minorée ?

2-Montrer que la somme de deux suites bornées est une suite bornée.

3-Montrer que si (u_n) tend vers 3, elle ne peut pas prendre une infinité de fois la valeur π.

4-Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = l + l'$.

5-Vrai ou faux : une suite qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.

6-Vrai ou faux : une suite positive qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.

1-Le produit de deux suites minorées est-elle une suite minorée ?

Réponse : C'est faux, prenons les suites (-1) et (n) qui sont toutes les deux minorées par -1 par exemple. Le produit est la suite $(-n)$ qui n'est pas minorée puisqu'elle tend vers $-\infty$.

2-Montrer que la somme de deux suites bornées est une suite bornée.

Réponse : Soient (u_n) et (v_n) deux suites bornées, il existe $(M, M') \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M \text{ et } |v_n| \leq M'$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq M + M'$$

Ce qui démontre que $(u_n) + (v_n)$ est bornée par $M + M'$.

3-Montrer que si (u_n) tend vers 3, elle ne peut pas prendre une infinité de fois la valeur π.

Réponse : Par définition de la convergence de (u_n) vers 3 et en prenant $\varepsilon = 0.1$, on a :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - 3| \leq 0.1$$

Or $|u_n - 3| \leq 0.1 \Leftrightarrow u_n \in [2.9, 3.1]$. Ainsi, à partir du rang N, u_n est différent de π, on en déduit que la suite ne prend qu'un nombre fini de fois la valeur π.

4-Démontrer que si $\lim_{n \to +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ et $\lim_{n \to +\infty} v_n = l' \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = l + l'$.

Réponse : Voir cours.

5-Vrai ou faux : une suite qui tend vers 0 est monotone à partir d'un certain rang.

Réponse : C'est faux, la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ tend vers 0 sans être monotone à partir d'un certain rang.

6-Vrai ou faux : une suite positive qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.

Réponse : C'est faux également. On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Cette suite est positive et tend vers 0 car : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$.
Pourtant, elle n'est pas décroissante à partir d'un certain rang.

6-Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 2 \text{ et } 0 \leq v_n \leq 3 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n = 6 \end{cases}$$

Que peut-on dire des suites (u_n) et (v_n) ?