D1 ★★★ Soit E un ensemble fini non vide muni d'une loi de composition interne associative notée $\star$.
Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $a \star a = a$.

Corrigé : Fixons x un élément quelconque de E, l'associativité de la loi $\star$ permet de donner un sens à x^k pour tout entier naturel non nul k. On considère l'application suivante :

$$\varphi \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & E \\ n & \mapsto & x^{2^n} \end{array}$$

L'application φ n'est pas injective. En effet, si elle l'était, comme E est un ensemble fini, l'ensemble de départ, $\mathbb{N}$, serait aussi un ensemble fini ce qui n'est pas le cas.

Par définition de la non-injectivité, il existe $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \neq q$ tels que $x^{2^p} = x^{2^q}$. Supposons, sans perte de généralité, que $p < q$ et posons $y = x^{2^p}$, on a :

$$y^{2^{q-p}} = (x^{2^p})^{2^{q-p}} = x^{2^q} = x^{2^p} = y$$

Posons $r = q - p$ et résumons notre recherche : pour l'instant on a trouvé un élément y de E et un entier naturel non nul r tel que :

$$\boxed{y^{2^r} = y}$$

.

► Si $r = 1$, c'est gagné puisque $y^2 = y$, l'élément $a = y$ répond à la question.

► Afin de comprendre le cas général, examinons le cas particulier où $r = 2$, on a alors $y^4 = y$. En utilisant systématiquement l'associativité, on a :

$$(y^3)^2 = y^6 = y^4 y^2 = y y^2 = y^3$$

Ainsi l'élément $a = y^3$ répond à la question.

► Dans le cas général, si on a $y^{2^r} = y$, il vient :

$$(y^{2^r-1})^2 = y^{2^{r+1}-2} = y^{2^r+2^r-2} = y^{2^r} y^{2^r-2} = y y^{2^r-2} = y^{2^r-1}$$

L'élément $a = y^{2^r-1}$ vérifie bien $a^2 = a$ et répond ainsi à la question.

D2 ★★★ Montrer que $H = \{x + \sqrt{3}y,\ x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}, x^2 - 3y^2 = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

Corrigé : Vérifions les différentes propriétés requises pour avoir un sous-groupe :

• Montrons tout d'abord que $H \subset \mathbb{R}_+^*$. Soient $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{Z}$ tels que $x^2 - 3y^2 = 1$ vérifions que $x + \sqrt{3}y \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $x \geq 0$, on a : $x^2 - 3y^2 = 1$ si et seulement si $x = \sqrt{1 + 3y^2}$. On a :

$$x = \sqrt{1+3y^2} > \sqrt{3y^2} = \sqrt{3}|y| \geq -\sqrt{3}y$$

Ce qui démontre que $x + \sqrt{3}y > 0$.

$$\boxed{H \subset \mathbb{R}_+^*}$$

• En prenant $x = 1$ et $y = 0$, on a bien $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{Z}$ et $x^2 - 3y^2 = 1$ donc $1 \in H$.

$$\boxed{1 \in H}$$

• Vérifions la stabilité par produit, soit z_1 et z_2 deux éléments de H, avec $z_1 = x_1 + \sqrt{3}y_1$ et $z_2 = x_2 + \sqrt{3}y_2$ où $(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2$, $(y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^2$, tels que $x_1^2 - 3y_1^2 = 1$ et $x_2 - 3y_2^2 = 1$.

On a :

$$z_1 z_2 = (x_1 + \sqrt{3}y_1)(x_2 + \sqrt{3}y_2) = \underbrace{(x_1x_2 + 3y_1y_2)}_{X} + \sqrt{3}\underbrace{(x_1y_2 + y_1x_2)}_{Y}$$

Il reste à démontrer que $X \in \mathbb{N}$, $Y \in \mathbb{Z}$ et $X^2 - 3Y^2 = 1$:

▶ Si $y_1y_2 \geq 0$, comme $x_1x_2 \geq 0$, alors $X \geq 0$. Sinon $y_1y_2 < 0$, par exemple $y_1 > 0$ et $y_2 < 0$, on a :

$$0 < y_1\sqrt{3} < x_1 \text{ et } 0 < -y_2\sqrt{3} < x_2$$

En effectuant le produit de ces inégalités, on obtient : $0 < -3y_1y_2 < x_1x_2$, c'est-à-dire $X > 0$. Le cas où $y_1 < 0$ et $y_2 > 0$ se traite de même.

Finalement $X \in \mathbb{N}$.

▶ Il est clair que $Y \in \mathbb{Z}$.

▶ Il reste à vérifier que $X^2 - 3Y^2 = 1$.

$$\begin{aligned}
X^2 - 3Y^2 &= (x_1x_2 + 3y_1y_2)^2 - 3(x_1y_2 + y_1x_2)^2 \\
&= x_1^2x_2^2 + 6x_1x_2y_1y_2 + 9y_1^2y_2^2 - 3x_1^2y_2^2 - 6x_1x_2y_1y_2 - 3y_1^2x_2^2 \\
&= x_1^2(x_2^2 - 3y_2^2) - 3y_1^2(x_2^2 - 3y_2^2) \\
&= x_1^2 - 3y_1^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$\boxed{H \text{ est stable par somme}}$

• Il reste à vérifier la stabilité par passage à l'inverse. Soit $z = x + \sqrt{3}y \in H$, c'est-à-dire que $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{Z}$ et $x^2 - 3y^2 = 1$. Déjà z n'est pas nul car si $x + \sqrt{3}y = 0$ alors soit $y = 0$ et dans ce cas $x = 0$ ceci est absurde puisque $x^2 - 3y^2 = 1$, soit $y \neq 0$ et dans ce cas $\sqrt{3} = -\frac{x}{y}$ ce qui est aussi absurde puisque $\sqrt{3}$ est irrationnel. Comme $z \neq 0$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + \sqrt{3}y} = \frac{x - \sqrt{3}y}{x^2 - 3y^2} = x - \sqrt{3}y$$

Ce qui démontre clairement que $\frac{1}{z} \in H$.

$\boxed{H \text{ est stable par passage à l'inverse}}$

Toutes les conditions sont réunies pour que H soit un sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$.