

1-Donner une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2-La fonction suivante est-elle continue en 0 et en $\frac{\pi}{2}$?

$$\begin{aligned} f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{\tan(x)}{x} & \text{si } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

3-Trouver les réels x tels que : $2^{x^2} = 3^{x^3}$.

4-Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. Démontrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.

1-Donner une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

Réponse : La fonction $f : x \mapsto \ln(-x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$. En utilisant le théorème donnant la dérivée d'une fonction composée, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, f'(x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$$

Nous avons bien trouvé une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

2-La fonction suivante est-elle continue en 0 et en $\frac{\pi}{2}$?

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\tan(x)}{x} & \text{si } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Réponse : Pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\frac{\tan(x)}{x} = \frac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \tan'(0) = \frac{1}{\cos^2(0)} = 1$$

Ce qui permet d'affirmer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = f(0)$, c'est la définition de f continue en 0.

Par contre $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(x)}{x} = +\infty$ ainsi f n'est pas continue en $\frac{\pi}{2}$.

3-Trouver les réels x tels que : $2^{x^2} = 3^{x^3}$.

Réponse : Cette équation, notée (E) , est définie pour $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow \ln(2^{x^2}) = \ln(3^{x^3}) \\ &\Leftrightarrow x^2 \ln(2) = x^3 \ln(3) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \ln(2) = x \ln(3)\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{0, \frac{\ln(2)}{\ln(3)}\right\}$.

4-Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. Démontrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.

Réponse : On considère la fonction :

$$\begin{array}{ccc} g & : & [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$$

La fonction g est continue sur $[0, 1]$ comme somme de fonctions continues sur $[0, 1]$. On a : $g(0) = f(0) - 0 \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ car f est à valeurs dans $[0, 1]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que g s'annule, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que :

$$g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - c = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$$