1-Soit A un anneau intègre et $(a, b, c) \in A^3$. Est-il vrai que si $abc = 0$ alors l'un des trois facteurs est nul ?

2-On se place dans l'anneau $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition et de la multiplication composante par composante. Quel est le neutre pour la multiplication ? Quels sont les éléments inversibles ? Cet anneau est-il intègre ?

3-On se place dans l'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ muni de l'addition et de la multiplication modulo 6. Quels sont les éléments inversibles ? L'anneau est-il intègre ? Quels sont les éléments nilpotents ?

4-Soit f l'application de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans lui-même définie par $f : x \mapsto |x|$. Justifier que f est un morphisme de groupes et donner son image et son noyau. L'application f est-elle injective ?

5-Démontrer que $H = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f(2) = 0\}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +)$ en l'écrivant comme le noyau d'un morphisme de groupes.

6-Démontrer que $i\mathbb{R}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$ en l'écrivant comme le noyau d'un morphisme. Même question en l'écrivant comme l'image d'un morphisme.

1-Soit A un anneau intègre et $(a, b, c) \in A^3$. Est-il vrai que si $abc = 0$ alors l'un des trois facteurs est nul ?

Réponse : On utilise deux fois l'intégrité de l'anneau. L'égalité $abc = 0$ implique $ab = 0$ ou $c = 0$ d'où $a = 0$, $b = 0$ ou $c = 0$. L'un des trois facteurs est nul.

2-On se place dans l'anneau $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition et de la multiplication composante par composante. Quel est le neutre pour la multiplication ? Quels sont les éléments inversibles ? Cet anneau est-il intègre ?

Réponse : Le neutre est $(1,1)$ puisque :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a,b) \times (1,1) = (a,b)$$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} (a,b) \text{ inversible} \quad & \Leftrightarrow \quad \exists (c,d) \in \mathbb{R}^2,\ (a,b) \times (c,d) = (1,1) \\ & \Leftrightarrow \quad \exists (c,d) \in \mathbb{R}^2,\ (ac,bd) = (1,1) \\ & \Leftrightarrow \quad a \neq 0 \text{ et } b \neq 0 \end{aligned}$$

Le couple (a,b) est inversible si et seulement si a et b sont non nuls et dans ce cas son inverse vaut $(1/a, 1/b)$.

L'anneau n'est pas intègre car $(1, 0) \times (0, 1) = (0, 0)$ démontre qu'il est possible qu'un produit soit nul sans que ses facteurs soient nuls.

3-On se place dans l'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ muni de l'addition et de la multiplication modulo 6. Quels sont les éléments inversibles ? L'anneau est-il intègre ? Quels sont les éléments nilpotents ?

Réponse : Le plus simple est de former la table de multiplication pour lire les propriétés à étudier :

$\times$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

• On a $1 \times 1 = 1$ et $5 \times 5 = 1$ donc 1 et 5 sont inversibles et ce sont les seuls d'après la table de loi.

• L'anneau n'est pas intègre car $2 \times 3 = 0$ pourtant 2 et 3 ne sont pas nuls.

• Soit $a \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ nilpotent, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0$, c'est-à-dire que 6 divise a^n donc $2|a^n$ et $3|a^n$. On en déduit que $2|a$ et $3|a$, ce qui démontre que $6|a$. Seul 0 est nilpotent.

4-Soit f l'application de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans lui-même définie par $f : x \mapsto |x|$. Justifier que f est un morphisme de groupes et donner son image et son noyau. L'application f est-elle injective ?

Réponse : Pour tous $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$, on a :

$$f(xy) = |xy| = |x||y| = f(x)f(y)$$

L'application f est un morphisme de groupes. On a : $\mathrm{Ker}(f) = \{-1, 1\}$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$. Enfin, le noyau de f n'est pas réduit à l'élément neutre ce qui permet de dire que f n'est pas injective.

5-Démontrer que $H = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f(2) = 0\}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+)$ en l'écrivant comme le noyau d'un morphisme de groupes.

Réponse : On pose :

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & (\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+) & \to & (\mathbb{R},+) \\ & & f & \mapsto & f(2) \end{array}$$

L'application φ est un morphisme de groupes car :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})^2,\ \varphi(f+g) = (f+g)(2) = f(2)+g(2) = \varphi(f)+\varphi(g)$$

0 étant le neutre de $(\mathbb{R},+)$, il est clair que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$, ainsi H est un sous-groupe de $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+)$.

6-Démontrer que $i\mathbb{R}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C},+)$ en l'écrivant comme le noyau d'un morphisme. Même question en l'écrivant comme l'image d'un morphisme.

Réponse : • On considère :

$$\begin{array}{cccc} f & : & (\mathbb{C},+) & \rightarrow & (\mathbb{R},+) \\ & & z & \mapsto & \mathrm{Re}(z) \end{array}$$

Il est clair que f est un morphisme car :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ \mathrm{Re}(z+z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$$

De plus :

$$z \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$$

donc $\mathrm{Ker}(f) = i\mathbb{R}$.

• Pour l'image, on considère :

$$\begin{array}{cccccc} g & : & (\mathbb{R},+) & \to & (\mathbb{C},+) \\ & & b & \mapsto & ib \end{array}$$

Il est clair que g est un morphisme de groupes car :

$$\forall (b,b') \in \mathbb{R}^2,\ i(b+b') = ib + ib'$$

Son image est bien $i\mathbb{R}$.