Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) = f(x) + f(y)$$

Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) = f(x) + f(y)$$

Réponse : On procède par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant la condition de l'énoncé. Cette condition étant vraie pour tous réels x et y, on peut en particulier choisir $x = y$. Cela donne :

$$\begin{array}{ccl} \forall x \in \mathbb{R},\ f(x)f(x) = f(x) + f(x) & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ f(x)^2 = 2f(x) \\ \text{''} & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ f(x)(f(x) - 2) = 0 \\ \text{''} & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0 \text{ ou } f(x) = 2 \end{array}$$

À ce stade de l'étude, on sait que f ne peut prendre que deux valeurs 0 ou 2. Il y a deux cas possibles :

• Soit f est constante égale à 0.

• Soit f prend une autre valeur que 0, c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 2$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x)f(a) = f(x) + f(a) \Leftrightarrow 2f(x) = f(x) + 2 \Leftrightarrow f(x) = 2$$

Ce calcul démontre que f est constante égale à 2.

La partie analyse est finie, nous avons cerné deux fonctions candidates pour répondre à la question : la fonction nulle et la fonction constante égale à 2.

Synthèse. Il est immédiat que la fonction nulle et la fonction constante égale à 0 vérifient la relation de l'énoncé puisque $0^2 = 0 + 0$ et $2^2 = 2 + 2$.

La fonction nulle et la fonction constante égale à 2 sont les seules fonctions vérifiant la relation de l'énoncé.