1-Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f a un minimum sur $\mathbb{R}$.

2-Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 1-périodique. Montrer que :

$$\forall a \in]0, +\infty[,\ \exists c \in \mathbb{R},\ f(c+a) = f(c)$$

1-Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f a un minimum sur $\mathbb{R}$.

Réponse : Par définition de la limite, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \geq A$, $f(x) \geq f(0) + 1$. De même, il existe $B < 0$ tel que pour tout $x \leq B$, $f(x) \geq f(0) + 1$.

Sur le segment $[B, A]$ la fonction f est continue donc elle est bornée et atteint son minimum. Ce minimum sur $[B, A]$ est aussi le minimum sur $\mathbb{R}$ puisqu'en dehors du segment $[B, A]$, la fonction f est supérieure à $f(0) + 1$.

2-Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 1-périodique. Montrer que :

$$\forall a \in]0, +\infty[, \ \exists c \in \mathbb{R}, \ f(c+a) = f(c)$$

Réponse : Soit $a \in]0, +\infty[$ fixé. On est amené à poser :

$$\begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x+a) - f(x) \end{array}$$

Il s'agit de démontrer que g s'annule. La fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes. Il existe $(x_1, x_2) \in [0, 1]^2$ tels que :

$$f(x_1) = \max_{x \in [0,1]} (f(x)) \text{ et } f(x_2) = \min_{x \in [0,1]} (f(x))$$

Il s'agit en fait d'un maximum et d'un minimum sur $\mathbb{R}$ car f est 1-périodique. Ainsi par définition de x_1 et de x_2, on a :

$$g(x_1) = f(x_1 + a) - f(x_1) \geq 0 \text{ et } g(x_2) = f(x_2 + a) - f(x_2) \leq 0$$

La fonction g étant continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'elle s'annule :

$$\exists c \in \mathbb{R},\ g(c) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R},\ f(c+a) = f(c)$$

$$\forall a \in]0, +\infty[,\ \exists c \in \mathbb{R},\ f(c+a) = f(c)$$