Généralités sur les suites - Convergence

1 Traduire chacun des énoncés suivants :

a) $\exists \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N},\ \forall n \geq M,\ |u_n - l| < \varepsilon$.

b) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N},\ \forall n \geq M,\ |u_n - l| < \varepsilon$.

c) $\exists M \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall n \geq M,\ |u_n - l| < \varepsilon$.

d) $\forall n \geq M,\ \exists M \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon > 0,\ |u_n - l| < \varepsilon$.

e) $\forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists M \in \mathbb{N},\ (n \geq M \Rightarrow\ |u_n - l| < \varepsilon)$.

2 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_n), (v_n)$ deux suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq a,\ v_n \leq b$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = a + b$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$.

3 ★ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation :

$$(E_n) : x^n + nx - 1 = 0$$

a) Montrer que (E_n) possède une unique solution positive que l'on note x_n.

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

4 ★ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que :

$$\forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ 0 \leq u_n \leq \frac{1}{k} + \frac{k}{n}$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

5 ♡★ Étudier la convergence de la suite :

$$u_n = \left(5\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{5}\cos(n)\right)^n$$

où $n \geq 1$.

6 ♡★ La suite (a_n) est définie pour $n \geq 0$:

$$a_{n+1} = \sqrt{4 + 3a_n} \text{ et } a_0 = 0$$

a) Démontrer que (a_n) est majorée par 4.

b) Démontrer que (a_n) est croissante.

c) En déduire que (a_n) est convergente et trouver sa limite.

7 ★ Soit (u_n) une suite réelle non constante et r-périodique avec $r \geq 2$. Démontrer que (u_n) diverge.

8 ★ Soit (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - 2| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - 2|$.

b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - 2| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

c) Soit $\varepsilon > 0$, donner un entier N pour lequel :

$$\forall n \geq N,\ |u_n - 2| \leq \varepsilon$$

Conclure.

9 ♡★ Soit (u_n) une suite d'entiers relatifs convergente, montrer que (u_n) est constante à partir d'un certain rang.

10 ★ Etudier la convergence des suites suivantes données par leur terme général :

a) $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$ où $x \in \mathbb{R}$.

b) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}$

c) $u_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}n\right)$

d) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

e) $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$

f) $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$

g) $u_n = n^{\frac{1}{\ln(n)}}$

h) $u_n = n^{\frac{\sin(n)}{n}}$

Suites adjacentes

11 ★ On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = -2\sqrt{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ et } v_n = -2\sqrt{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

12 ♡★ Pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on pose les suites de réels définies par $u_0 = a,\ v_0 = b$ et :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

a) Montrer que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ 2\sqrt{xy} \leq x + y$.

b) En déduire que : $\forall n \geq 1,\ u_n \leq v_n$.

c) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes à partir du rang $n = 1$.

13 ★★ Montrer que les suites (S_n) et (S'_n) définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } S'_n = S_n + \frac{1}{n.n!}$$

sont adjacentes. Démontrer que leur limite commune est irrationnelle.

Suites extraites

14 ★ Démontrer qu'une suite réelle croissante qui admet une suite extraite majorée est convergente.

15 ★ Montrer que de toute suite non majorée on peut extraire une sous-suite qui diverge vers $+\infty$.

16 ♡★ Soit (u_n) une suite telle que (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

17 ♡★★ Montrer que la suite de terme général :

$$u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

diverge.

18 ★★★ Soit (u_n) une suite réelle bornée telle que $(v_n) = \left(u_n + \dfrac{1}{2}u_{2n}\right)$ converge vers $l \in \mathbb{R}$.

a) Justifier que (u_n) admet une valeur d'adhérence.

b) Soit a une valeur d'adhérence de (u_n), démontrer que $2(l-a)$ est une valeur d'adhérence de (u_n).

c) Expliciter la suite définie par $a_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 2(l - a_n)$.

d) En déduire que (u_n) tend vers $\dfrac{2}{3}l$.

Suites récurrentes linéaires

19 ♡ Donner une expression du terme général de la suite de Fibonacci définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0,\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

20 ★ Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, on considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = \lambda \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq 1$$

21 ★ Déterminer la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n + 12n \end{cases}$$

Défis

D1 ★★ Justifier que la suite de terme général :

$$u_n = \cos(n)$$

diverge.

D2 ★★★★ Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n + b_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{a_n} + e^{b_n} = 2$.
Montrer que la suite (a_n) tend vers 0.