1-La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est-elle une relation d'ordre ?

2-On pose : $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ (a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow a \leq c$ et $b \leq d$. Trouver deux éléments non comparables pour cette relation.

3-Soit E un ensemble avec au moins deux éléments. On définit une relation binaire sur $\mathcal{P}(E)$ par : $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B$. Quelles sont les propriétés de cette relation ? Est-elle totale ?

4-Tracer le graphe d'une relation d'équivalence sur un ensemble à 4 éléments en utilisant exactement 10 flèches.

5-Sur $\mathbb{R}$, on considère la relation $<$. Est-elle antisymétrique ?

6-On se place dans $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité et on pose $A = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Démontrer que A ne possède ni maximum ni minimum.

7-Soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition d'un ensemble E. Donner une relation d'équivalence sur E dont les classes d'équivalences sont les éléments de la partition.

1-La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est-elle une relation d'ordre ?

Réponse : Non car elle n'est pas réflexive.

2-On pose : $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ (a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow a \leq c$ et $b \leq d$. Trouver deux éléments non comparables pour cette relation.

Réponse : Les éléments $(1,2)$ et $(3,0)$ ne sont pas comparables pour cette relation. Il est faux que $(1,2)\mathcal{R}(3,0)$ puisque $2 > 0$ et il est faux que $(3,0)\mathcal{R}(1,2)$ puisque $3 > 1$.

3-Soit E un ensemble avec au moins deux éléments. On définit une relation binaire sur $\mathcal{P}(E)$ par : $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B$. Quelles sont les propriétés de cette relation ? Est-elle totale ?

Réponse : • $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \subset A$. On en déduit que $\mathcal{R}$ est réflexive.

• $\forall (A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3,\ (A \subset B \text{ et } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$. On en déduit que $\mathcal{R}$ est transitive.

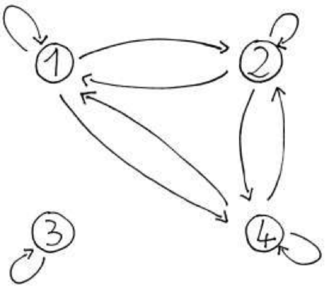
• $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ (A \subset B \text{ et } B \subset A) \Rightarrow A = B$. On en déduit que $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

• On note a et b deux éléments de E, $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique car $\{a\} \subset \{a, b\}$ mais $\{a, b\}$ n'est pas inclus dans $\{a\}$.

• $\mathcal{R}$ n'est pas totale puisque $\{a\}$ et $\{b\}$ ne sont pas comparables.

4-Tracer le graphe d'une relation d'équivalence sur un ensemble à 4 éléments en utilisant exactement 10 flèches.

Réponse :



5-Sur $\mathbb{R}$, on considère la relation $<$. Est-elle antisymétrique ?

Réponse : On doit vérifier que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x < y \text{ et } y < x) \Rightarrow x = y$$

Le membre de gauche de l'implication ne se produit jamais, ainsi l'implication est vraie.

6-On se place dans $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité et on pose $A = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Démontrer que A ne possède ni maximum ni minimum.

Réponse : • Par l'absurde, soit M le maximum de A alors en particulier $2M|M$ donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $2Mk = M$. Or $M \in A$ donc $M \neq 0$ cela implique $k = \dfrac{1}{2}$ d'où l'absurdité.

• Par l'absurde, soit m le minimum de A alors en particulier $m|2$ et $m|3$ donc $m = 1$ d'où l'absurdité car $m \in A$.

7-Soit $(A_i)_{i\in I}$ une partition d'un ensemble E. Donner une relation d'équivalence sur E dont les classes d'équivalences sont les éléments de la partition.

Réponse : On pose :

$$\forall (x,y)\in E^2,\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists i\in I,\ x\in A_i \text{ et } y\in A_i$$

On vérifie que c'est une relation d'équivalence et que la classe de x est l'unique partie A_i à laquelle il appartient.