1. Combien d'éléments a l'ensemble : $\{a, \{b, \{c\}\}, \{d, e\}\}$?

2. Décrire $\mathcal{P}(\emptyset)$. Décrire $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$. Décrire $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$.

3. Soient E et F deux ensembles. Vrai ou faux :

$$\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$$

4. Soient E et F deux ensembles. Vrai ou faux :

$$\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$$

1. Combien d'éléments a l'ensemble : $\{a, \{b, \{c\}\}, \{d, e\}\}$?

Réponse : Il y a trois éléments : a, $\{b, \{c\}\}$ et $\{d, e\}$.

2. Décrire $\mathcal{P}(\emptyset)$.

Réponse : On obtient : $\{\emptyset\}$.

Décrire $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$.

Réponse : On obtient : $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Décrire $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$.

Réponse : On obtient : $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

3. Soient E et F deux ensembles. Vrai ou faux :

$$\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$$

Réponse : C'est faux, donnons un contre-exemple. On peut choisir $E = \{a\}$ et $F = \{b\}$, on a :

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}\} \text{ et } \mathcal{P}(F) = \{\emptyset, \{b\}\}$$

Ce qui donne : $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$. Par contre $E \cup F = \{a, b\}$ et :

$$\mathcal{P}(E \cup F) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

4. Soient E et F deux ensembles. Vrai ou faux :

$$\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$$

Réponse : Pour démontrer cette égalité, on peut procéder par équivalences :

$$\begin{array}{rcl} A \in \mathcal{P}(E \cap F) & \Leftrightarrow & A \subset E \cap F \\ & \Leftrightarrow & A \subset E \text{ et } A \subset F \\ & \Leftrightarrow & A \in \mathcal{P}(E) \text{ et } A \in \mathcal{P}(F) \\ & \Leftrightarrow & A \in \mathcal{P}(E) \cap A \in \mathcal{P}(F) \end{array}$$

D'où l'égalité :

$$\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$$