

Exercice

On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$(E) : x(x^2 - 1)y'(x) + 2y(x) = x$$

On cherche les solutions de (E) définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

1. Justifier que l'on va résoudre l'équation différentielle (E) sur les intervalles $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 0[$, $I_3 =]0, 1[$ et $I_4 =]1, +\infty[$. On note dans la suite I l'un de ces intervalles.
2. Trouver $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que : $\frac{2}{x(x^2 - 1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x + 1} + \frac{\gamma}{x - 1}$.
3. Résoudre l'équation homogène associée à (E) sur I .
4. Résoudre l'équation (E) sur I .

Afin de pouvoir aborder la question 5., vous pouvez admettre que les solutions de l'équation (E) sur l'intervalle I sont de la forme : $y : x \mapsto \frac{\lambda x^2 - x}{x^2 - 1}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

5.
 - (a) Déterminer les solutions de (E) sur $] - 1, 1[$.
 - (b) Déterminer les solutions de (E) sur $] - \infty, 0[$.
 - (c) Déterminer les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.
 - (d) L'équation (E) admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$?