

17 ★★ À l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse, déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) = f(xy) + x + y$$

Corrigé : On procède par analyse-synthèse.

Analyse. On considère une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie la condition de l'énoncé. En prenant $x = y = 0$, on obtient l'indication $f(0)^2 = f(0)$. Ceci implique que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. On essaie avec $x = 0$ et $y = 1$, cela donne $f(0)f(1) = f(0) + 1$ ce qui montre que $f(0) = 0$ n'est pas possible. D'où $f(0) = 1$. Il reste à utiliser la relation avec $y = 0$, pour tout x réel, on a $f(x)f(0) = f(0) + x$. Finalement pour tout x réel, $f(x) = x + 1$.

Synthèse. Vérifions que la fonction trouvée convient, soient x et y deux réels :

$$f(x)f(y) = (x+1)(y+1) = xy + 1 + x + y = f(xy) + x + y$$

La seule fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation de l'énoncé est $f : x \mapsto x + 1$.

19 ★★ Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n! \leq n^n$$

Corrigé : On considère l'hypothèse suivante que l'on va démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{H}_n : 2^{n-1} \leq n! \leq n^n$$

• **Initialisation.** Pour $n = 1$, la double inégalité devient : $2^0 \leq 1! \leq 1^1$, c'est-à-dire $1 \leq 1 \leq 1$. Ainsi $\mathcal{H}_1$ est vraie.

• **Hérédité.** On suppose que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour un entier naturel non nul n fixé. On a donc $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$, on multiplie cette relation par $(n+1)$ pour obtenir :

$$2^{n-1}(n+1) \leq n!(n+1) \leq n^n(n+1)$$

Or $2 \leq n+1$ car $n \geq 1$ donc $2^n = 2^{n-1} \times 2 \leq 2^{n-1}(n+1) \leq n!(n+1) = (n+1)!$. On a bien $2^n \leq (n+1)!$.

D'autre part : $n^n(n+1) \leq (n+1)^n(n+1) = (n+1)^{n+1}$ ainsi on a bien $(n+1)! \leq (n+1)^{n+1}$. Finalement :

$$2^n \leq (n+1)! \leq (n+1)^{n+1}$$

On a démontré que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie, ce qui termine la récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

D1 On dispose de neuf billes visuellement identiques, huit d'entre elles ont la même masse mais la neuvième est plus lourde. Comment peut-on démasquer l'intrus en deux pesées sur une balance à deux plateaux ?

Corrigé : On note 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 nos billes.

On compare les groupes (1, 2, 3) et (4, 5, 6). Il y a deux cas :

- ▶ Si l'un est plus lourd que l'autre, on a localisé le groupe dans lequel se trouve l'intrus.
- ▶ Si la balance est en équilibre l'intrus se trouve dans le groupe (7, 8, 9).

Dans tous les cas, à la fin de cette première pesée, on a repéré le groupe de trois billes dans lequel se trouve l'intrus.

On compare deux billes de ce groupe :

- ▶ Si la balance est en déséquilibre, on a trouvé l'intrus.
- ▶ Si la balance est en équilibre la bille plus lourde est celle non pesée.

D2 ★★ On dispose de neuf billes visuellement identiques de même masse sauf une. Comment peut-on démasquer l'intrus en trois pesées sur une balance à deux plateaux ?

Corrigé : La différence par rapport au problème précédent est qu'ici on ne sait pas si l'intrus est plus lourd ou plus

léger. On convient d'appeler "témoin" une bille dont on sait qu'elle n'est pas l'intrus.

On compare les billes (1, 2, 3) avec les billes (4, 5, 6). Il y a deux cas à distinguer :

► Si la balance est en équilibre, c'est que l'intrus se trouve dans le groupe (7, 8, 9). On utilise la bille 1 comme témoin puisque l'on sait que ce n'est pas l'intrus. On pèse 1 avec 7 puis 1 avec 8. Ces deux pesées supplémentaires permettent de savoir qui est l'intrus parmi 7, 8 et 9.

► Si la balance est en déséquilibre, supposons, l'autre cas se traitant de la même façon, que (1, 2, 3) est plus lourd que (4, 5, 6). On sait que l'intrus n'est pas dans le groupe (7, 8, 9) ainsi on va utiliser la bille 9 comme témoin.

Pour la seconde pesée, on compare (1, 4) avec (2, 5), il y a plusieurs cas possibles :

- Si la balance est en équilibre, l'intrus est 3 ou 6. On le trouve en pesant 3 avec le témoin 9.
- Si (1, 4) est plus lourd que (2, 5). Si l'intrus est plus lourd ce sera 1 et si l'intrus est plus léger ce sera 5, puisqu'on rappelle que (1, 2, 3) est plus lourd que (4, 5, 6). Pour savoir qui est l'intrus parmi 1 et 5, il n'y a qu'à faire la dernière pesée avec le témoin 9.
- Si (1, 4) est plus léger que (2, 5). Si l'intrus est plus lourd ce sera 2 et si l'intrus est plus léger ce sera 4, puisqu'on rappelle que (1, 2, 3) est plus lourd que (4, 5, 6). Pour savoir qui est l'intrus parmi 2 et 4, il n'y a qu'à faire la dernière pesée avec le témoin 9.