1 ★ Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

Corrigé : On procède par encadrement, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

On multiplie par $n \in \mathbb{N}^*$, $n\lfloor x \rfloor \leq nx < n\lfloor x \rfloor + n$. L'entier $n\lfloor x \rfloor$ est inférieur à nx, il est donc inférieur à $\lfloor nx \rfloor$ d'où :

$$n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor < n\lfloor x \rfloor + n$$

On divise par n :

$$\lfloor x \rfloor \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < \lfloor x \rfloor + 1$$

On en déduit que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor}$$

2 ★★★ Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$$

Corrigé : • Pour $n \geq 1$, on a les équivalences :

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2} \Leftrightarrow n + 2\sqrt{n(n+1)} + n + 1 < 4n + 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)} < 2n + 1 \Leftrightarrow 4n^2 + 4n < 4n^2 + 4n + 1$$

Cette dernière inégalité étant vérifiée, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$$

Ce qui nous permet de dire que $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor \leq \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$

• Il reste à démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor \geq \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor < \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$. Notons $q = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$, on a :

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < q \leq \sqrt{4n+2}$$

On élève au carré :

$$2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)} < q^2 \leq 4n + 2$$

C'est-à-dire :

$$2\sqrt{n(n+1)} < q^2 - 2n - 1 \leq 2n + 1$$

On élève encore au carré :

$$(2n+1)^2 - 1 < (q^2 - 2n - 1)^2 \leq (2n+1)^2$$

Nous avons un nombre entier compris entre deux entiers consécutifs, nécessairement : $q^2 - 2n - 1 = 2n + 1$, c'est-à-dire $q^2 = 4n + 2$. Le carré d'un entier naturel n'est jamais congru à 2 modulo 4, en effet pour $a \in \mathbb{Z}$:

- ▶ $a \equiv 0\ [4] \Rightarrow a^2 \equiv 0\ [4]$
- ▶ $a \equiv 1\ [4] \Rightarrow a^2 \equiv 1\ [4]$
- ▶ $a \equiv 2\ [4] \Rightarrow a^2 \equiv 2^2 \equiv 0\ [4]$
- ▶ $a \equiv 3\ [4] \Rightarrow a^2 \equiv 3^2 \equiv 1\ [4]$

Nous avons l'absurdité recherchée, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor}$$

3 ★ Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$A_n = \{r^n,\ r \in \mathbb{Q}\}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante afin que A_n soit dense dans $\mathbb{R}$.

Corrigé : • Déjà si n est un entier pair, alors $q^n \geq 0$ ainsi A_n ne peut pas être une partie dense dans $\mathbb{R}$, par exemple il n'y a pas d'élément de A_n entre -2 et -1.

• Si n est impair, nous allons démontrer que A_n est dense dans $\mathbb{R}$. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x < y$. Par stricte croissance de la fonction $t \mapsto t^{\frac{1}{n}}$, on a : $x^{\frac{1}{n}} < y^{\frac{1}{n}}$. On sait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que :

$$x^{\frac{1}{n}} < r < y^{\frac{1}{n}}$$

On élève ensuite à la puissance n car la fonction $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ étant donné que n est impair :

$$x < r^n < y$$

$$\boxed{A_n \text{ est dense dans } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } n \text{ est impair}}$$

4 ★ Soit $A = \left\{\dfrac{m}{m+n},\ (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$. Déterminer, si elles existent, la borne supérieure et la borne inférieure de A.

Corrigé : • Pour tout $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a :

$$0 < \frac{m}{m+n} < 1$$

ainsi la partie A est non vide, majorée par 1 et minorée par 0. D'après la propriété de la borne supérieure, $\sup(A)$ et $\inf(A)$ existent.

• Montrons que $\inf(A) = 0$. Déjà 0 est un minorant de A d'après l'encadrement ci-dessus. Soit $\alpha > 0$, montrons que α n'est pas un minorant de A, ainsi 0 sera bien le plus grand minorant de A. On fixe $m = 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{1+n} = 0$ ainsi il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{1+n_0} < \alpha$. Ce qui démontre que α n'est pas un minorant de A. On a démontré que :

$$\boxed{\inf(A) = 0}$$

• Montrons que $\sup(A) = 1$. Déjà 1 est un majorant de A, prenons $\beta < 1$ et montrons que β n'est pas un majorant de A ainsi 1 sera bien le plus petit majorant de A. On fixe $n = 1$, on a $\lim\limits_{m \to +\infty} \dfrac{m}{m+1} = 1$ ainsi il existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{m_0}{m_0+1} > \beta$. Ce qui démontre que β n'est pas un majorant de A. On a démontré que :

$$\boxed{\sup(A) = 1}$$

5 ★★ Soit $A = \left\{\dfrac{m}{n} + \dfrac{4n}{m},\ (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$. Déterminer, si elles existent, la borne supérieure et la borne inférieure de A.

Corrigé : • On va utiliser l'inégalité classique :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^*,\ a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

Elle se démontre en développant : $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. En appliquant cette inégalité avec $a = \dfrac{m}{n}$ et $b = \dfrac{4n}{m}$ où $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on obtient :

$$\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} \geq 2\sqrt{\frac{m}{n} \times \frac{4n}{m}} = 4$$

La partie A est non vide et minorée par 4, d'après la propriété de la borne inférieure, $\inf(A)$ existe. De plus, le minorant 4 est atteint par exemple lorsque $m = 2$ et $n = 1$, ce qui démontre que 4 est le minimum de A. Par suite :

$$\boxed{\inf(A) = 4}$$

• Par contre A n'est pas majorée, ce que l'on voit en fixant $m = 1$, on a : $\dfrac{1}{n} + \dfrac{4n}{1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Comme A n'est pas majorée, A ne possède pas de borne supérieure.

---

6 ★★ Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On pose $X = \{|x-y|,\ (x,y) \in A^2\}$. Montrer que :

$$\sup(X) = \sup(A) - \inf(A)$$

Corrigé : • Déjà remarquons que A étant non vide majorée et minorée, $M = \sup(A)$ et $m = \inf(A)$ existent d'après la propriété de la borne supérieure.

• Montrons ensuite que $\sup(X)$ existe. La partie X est non vide, il reste à démontrer qu'elle est majorée. Pour $(x, y) \in A^2$, on a :

$$m \leq x \leq M \text{ et } m \leq y \leq M$$

Ce qui implique $y - x \leq M - m$ et $x - y \leq M - m$ ainsi $|x - y| \leq M - m$. La partie X est non vide et majorée donc $\sup(X)$ existe.

• Démontrons que $\sup(X) = M - m$, d'après le paragraphe ci-dessus, on sait que $M - m$ est un majorant de X. Montrons que c'est le plus petit majorant de X, pour cela prenons $T \in \mathbb{R}$ avec $T < M - m$ et montrons que T est pas un majorant de X. Posons $\varepsilon = (M - m) - T > 0$.

On sait que $M - \dfrac{1}{2}\varepsilon$ n'est un majorant de A (car il est inférieur au plus petit majorant de A), il existe $x_0 \in A$ tel que $x_0 > M - \dfrac{1}{2}\varepsilon$.

De même $m + \dfrac{1}{2}\varepsilon$ n'est pas un minorant de A donc il existe $y_0 \in A$ tel que $y_0 < m + \dfrac{1}{2}\varepsilon$. On obtient :

$$|x_0 - y_0| = x_0 - y_0 > \left(M - \frac{1}{2}\right) - \left(m + \frac{1}{2}\varepsilon\right) = M - m - \varepsilon = T$$

Ainsi T n'est pas un majorant de A, ce que l'on voulait démontrer.

$$\boxed{\sup(X) = \sup(A) - \inf(A)}$$

---

7 ★ On pose $f : x \mapsto \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor - \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor$.

1. Démontrer que f est périodique.
2. Démontrer que f est nulle sur $[0, 1[$.
3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor = \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$.

Corrigé :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x+1) = \lfloor 2(x+1) \rfloor - \lfloor x+1 \rfloor - \left\lfloor x+1+\frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x+2 \rfloor - \lfloor x+1 \rfloor - \left\lfloor x+\frac{3}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor + 2 - \lfloor x \rfloor - 1 - \left\lfloor x+\frac{1}{2} \right\rfloor - 1 = f(x)$$

En utilisant la formule vue en cours :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall p \in \mathbb{Z},\ \lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$$

Nous avons démontré que f est 1-périodique.

2. Prenons $x \in [0,1[$, il y a deux cas à considérer :

• Soit $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$, on a :

$$f(x) = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor - \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 0 - 0 - 0 = 0$$

car $2x \in [0,1[$ et $x + \frac{1}{2} \in [0,1[$.

• Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$, on a :

$$f(x) = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor - \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 1 - 0 - 1 = 0$$

car $2x \in [1,2[$ et $x + \frac{1}{2} \in \left[1, \frac{3}{2}\right[$.

La fonction f est nulle sur $[0,1[$.

3. Par 1-périodicité, la fonction f étant nulle sur $[0,1[$, elle est nulle sur $\mathbb{R}$. Ce qui équivaut à :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{n} \left(\left\lfloor \frac{x}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} \right\rfloor \right) = \lfloor x \rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{n+1}} \right\rfloor$$

ceci en reconnaissant une somme télescopique.

$\boxed{8}$ ★ Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $x > 1$ un irrationnel. Démontrer que $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{x} \right\rfloor = n - 1$.

Corrigé : On encadre $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$ et comme $x > 1$, on obtient :

$$n - 1 < n - \frac{1}{x} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{x} \leq n$$

On en déduit que $n - 1 \leq \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{x} \right\rfloor \leq n$. Cependant si $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{x} \right\rfloor = n$ alors $n \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{x}$. Finalement $\frac{\lfloor nx \rfloor}{x} = n$, c'est-à-dire $x = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ ce qui est absurde car x est irrationnel. On en déduit que :

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{x} \right\rfloor = n - 1$$

$\boxed{9}$ Soit $a \in \mathbb{R}$ que dire de la parité de l'entier $\left\lfloor a + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor a - \frac{1}{2} \right\rfloor$?

Corrigé : Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $f(a) = \left\lfloor a + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor a - \frac{1}{2} \right\rfloor$. On a $f\left(a + \frac{1}{2}\right) = \lfloor a + 1 \rfloor + \lfloor a \rfloor = 2\lfloor a \rfloor + 1$. En utilisant cette formule, il vient :

$$f(a) = f\left(\left(a - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right) = 2\left\lfloor a - \frac{1}{2} \right\rfloor + 1$$

C'est un entier impair.

$\boxed{10}$ ★★★ Soit $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \left\lfloor \frac{x + k}{p} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

Corrigé : • On commence par effectuer la division euclidienne de $\lfloor x \rfloor$ par p cela donne :

$$\lfloor x \rfloor = pq + r \text{ avec } (q,r) \in \mathbb{Z}^2 \text{ et } 0 \leq r < p$$

• Soit $k \in [\![0, p-1]\!]$, on va distinguer deux cas.

► Si $k \in [\![0, p-r-1]\!]$, on a :

$$pq \leq pq + r = \lfloor x \rfloor \leq x \leq x + k \Rightarrow q \leq \frac{x+k}{p}$$

et d'autre part :

$$x + k < \lfloor x \rfloor + 1 + k = pq + r + 1 + k \leq pq + p \Rightarrow \frac{x+k}{p} < q + 1$$

Finalement :

$$q \leq \frac{x+k}{p} < q + 1$$

On en déduit que pour $k \in [\![0, p-r-1]\!]$, on a : $\left\lfloor \dfrac{x+k}{p} \right\rfloor = q$.

► Si $k \in [\![p-r, p-1]\!]$, on a :

$$pq + p = \lfloor x \rfloor + p - r \leq x + p - r \leq x + k \Rightarrow q + 1 \leq \frac{x+k}{p}$$

et d'autre part :

$$x + k < \lfloor x \rfloor + 1 + k \leq \lfloor x \rfloor + p = pq + r + p < pq + 2p \Rightarrow \frac{x+k}{p} < q + 2$$

Finalement :

$$q + 1 \leq \frac{x+k}{p} < q + 2$$

On en déduit que pour $k \in [\![p-r, p-1]\!]$, on a : $\left\lfloor \dfrac{x+k}{p} \right\rfloor = q + 1$.

• Il reste à séparer la somme en deux et à utiliser les résultats trouvés :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \left\lfloor \frac{x+k}{p} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{p-r-1} \left\lfloor \frac{x+k}{p} \right\rfloor + \sum_{k=p-r}^{p-1} \left\lfloor \frac{x+k}{p} \right\rfloor = (p-r)q + r(q+1) = pq + r = \lfloor x \rfloor$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p-1} \left\lfloor \frac{x+k}{p} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor}$$

$\boxed{11}$ ★ Résoudre l'équation (E) : $\lfloor 2x - 3 \rfloor = \lfloor x + 1 \rfloor$.

Corrigé : Pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$ ainsi :

$$\lfloor 2x - 3 \rfloor = \lfloor x + 1 \rfloor \Leftrightarrow \lfloor 2x \rfloor - 3 = \lfloor x \rfloor + 1 \Leftrightarrow \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor = 4$$

On raisonne par analyse-synthèse.

• **Analyse.** Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution de (E). On a :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \Leftrightarrow -\lfloor x \rfloor - 1 < -x \leq -\lfloor x \rfloor$$

$$\lfloor 2x \rfloor \leq 2x < \lfloor 2x \rfloor + 1$$

En sommant, on obtient :

$$\lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor - 1 < 2x - x < \lfloor 2x \rfloor + 1 - \lfloor x \rfloor$$

Comme x est solution de l'équation, cela donne : $3 < x < 5$.

- **Synthèse.** On a :

$x \in$	$]3, 3.5[$	$[3.5, 4[$	$[4, 4.5[$	$[4.5, 5[$
$2x \in$	$]6, 7[$	$[7, 8[$	$[8, 9[$	$[9, 10[$
$\lfloor x \rfloor$	3	3	4	4
$\lfloor 2x \rfloor$	6	7	8	9
$\lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor$	3	4	4	5

$$\boxed{\mathcal{S} = [3.5, 4.5[}$$