1 ★★★ Soit $f : E \to F$ une application, démontrer que :

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ A \subset B \Rightarrow f(B \setminus A) = f(B) \setminus f(A)$$

Corrigé : • On suppose que f est injective, prenons A et B deux parties de E telles que $A \subset B$ et démontrons que $f(B \setminus A) = f(B) \setminus f(A)$ par double inclusion.

► Soit $\underline{y \in f(B \setminus A)}$, il existe $x \in B \setminus A$ tel que $y = f(x)$. On obtient directement $y \in f(B)$ puisque $x \in B$. Démontrons que $y \notin f(A)$, par l'absurde si $y = f(x')$ où $x' \in A$ alors $x = x'$ par injectivité de f. C'est contradictoire car $x \in B \setminus A$ et $x' \in A$. Finalement $y \in f(B)$ et $y \notin f(A)$ donc $\underline{y \in f(B) \setminus f(A)}$.

► Soit $\underline{y \in f(B) \setminus f(A)}$, il existe $x \in B$ tel que $y = f(x)$. Cependant $x \notin A$ car sinon $y = f(x) \notin f(A)$. C'est-à-dire que $x \in B \setminus A$ donc $f(x) = \underline{y \in f(B \setminus A)}$.

On a démontré par double inclusion que $f(B \setminus A) = f(B) \setminus f(A)$.

• Réciproquement, on suppose que pour toutes parties $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$ avec $A \subset B$, on a : $f(B \setminus A) = f(B) \setminus f(A)$, démontrons que f est injective. On suppose que $f(x) = f(x')$ avec $(x,x') \in E^2$, on doit prouver que $x = x'$. On raisonne par l'absurde en supposant que $x \neq x'$. On va appliquer l'hypothèse à $A = \{x\}$ et $B = \{x, x'\}$, on a bien $A \subset B$. On a : $f(B \setminus A) = f(\{x'\}) = \{f(x')\}$, $f(B) = f(\{x,x'\}) = \{f(x)\}$ et $f(A) = \{f(x)\}$ donc $f(B) \setminus f(A) = \emptyset$. C'est contradictoire avec l'hypothèse $f(B \setminus A) = f(B) \setminus f(A)$. On en déduit que $x = x'$ et par suite f est injective.

$$\boxed{f \text{ injective} \Leftrightarrow \forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ A \subset B \Rightarrow f(B \setminus A) = f(B) \setminus f(A)}$$

2 ★★ On considère l'application :

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & z^2 + z + 1 \end{array}$$

1. Déterminer $f(\mathbb{C})$, $f(\mathbb{C}^*)$ et $f(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{C})$, $f^{-1}(\mathbb{C}^*)$ et $f^{-1}(\mathbb{R})$.

Corrigé :

1. • On $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ car tout complexe a un antécédent par f. En effet, prenons $\omega \in \mathbb{C}$, l'équation $z^2 + z + 1 - \omega = 0$ a au moins une solution $z_0 \in \mathbb{C}$, on a alors $f(z_0) = \omega$.

   • De même, on a $f(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}$ car si $\omega \in \mathbb{C}$ alors l'équation $z^2 + z + 1 - \omega$ a au moins une solution non nulle puisque la somme des racines vaut -1. Ainsi ω a un antécédent par f dans $\mathbb{C}^*$.

   • Par définition, on a $f(\mathbb{R}) = \{x^2 + x + 1,\ x \in \mathbb{R}\}$, on en déduit que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. D'autre part, $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, ainsi $f(\mathbb{R}) = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$.

2. • On a $f^{-1}(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C},\ f(z) \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}$.

   • On a $f^{-1}(\mathbb{C}^*) = \{z \in \mathbb{C},\ f(z) \neq 0\} = \mathbb{C} \setminus \{j, j^2\}$ car j et j^2 sont les deux solutions de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

   • On a $z \in f^{-1}(\mathbb{R})$ si et seulement si $f(z) \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}$. En notant $z = x + iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

   $$z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy + x + iy + 1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2xy + y = 0 \Leftrightarrow y(2x+1) = 0$$

   On en déduit que $f^{-1}(\mathbb{R})$ est l'union de l'axe des réels et de la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

3 ★★ On considère l'application f définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + \dfrac{1}{z} \end{array}$$

1. L'application f est-elle injective ?
2. Quelle est son image ?
3. Déterminer $f(\mathbb{R}^*)$ et $f(\mathbb{U})$.

Corrigé :

1. L'application f n'est pas injective car $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = f(2)$.
2. Tout complexe ω a un antécédent par f car :

$$z + \frac{1}{z} = \omega \Leftrightarrow z^2 - \omega z + 1 = 0$$

   Cette dernière équation a une solution complexe non nulle ainsi l'application f est surjective et $f(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}$.

3. Par définition $f(\mathbb{R}^*) = \{x + \dfrac{1}{x},\ x \in \mathbb{R}\}$. L'étude des variations de cette fonction montre qu'elle prend comme valeurs $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$. On obtient $f(\mathbb{R}^*) =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$.

   Sachant qu'un nombre complexe de module 1 peut s'écrire sous la forme e^{it} où $t \in \mathbb{R}$. On a $f(\mathbb{U}) = \{e^{it} + \dfrac{1}{e^{it}},\ t \in \mathbb{R}\} = \{e^{it} + e^{-it},\ t \in \mathbb{R}\} = \{2\cos(t),\ t \in \mathbb{R}\} = [-2, 2]$.

4 ★ Soient $f : E \to F$ une application, A et B deux parties de F. Démontrer que :

$$f^{-1}(A\Delta B) = f^{-1}(A)\Delta f^{-1}(B)$$

On rappelle que $A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

Corrigé :

On utilise les propriétés du cours qui mettent en jeu l'image réciproque :

$$\begin{aligned} f^{-1}(A\Delta B) &= f^{-1}((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) \\ &= f^{-1}(A \cap \overline{B}) \cup f^{-1}(\overline{A} \cap B) \\ &= \left(f^{-1}(A) \cap f^{-1}(\overline{B})\right) \cup \left(f^{-1}(\overline{A}) \cap f^{-1}(B)\right) \\ &= \left(f^{-1}(A) \cap \overline{f^{-1}(B)}\right) \cup \left(\overline{f^{-1}(A)} \cap f^{-1}(B)\right) \\ &= f^{-1}(A)\Delta f^{-1}(B) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (AB) \in \mathcal{P}(F)^2,\ f^{-1}(A\Delta B) = f^{-1}(A)\Delta f^{-1}(B)}$$