1. (a) La fonction $x \mapsto \dfrac{x^5+x^4+2x^3-4}{x^8-16}$ est définie sur $[0,1]$ car :

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^8 \leq 1 \Rightarrow -16 \leq x^8-16 \leq -15$$

Ceci démontre que le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1]$. De plus, la fonction que l'on intègre est continue en tant que fonction rationnelle. On en déduit que I est bien définie puisque c'est une intégrale d'une fonction continue sur un segment.

$$\boxed{I \text{ est bien définie}}$$

(b) i. Pour x réel, on a :

$$x^4+4 = (x^2+2)^2-4x^2 = (x^2+2+2x)(x^2+2-2x) = (x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$$

En utilisant ceci, pour x réel, on a :

$$x^8-16 = (x^4+4)(x^4-4) = (x^2+2x+2)(x^2-2x+2)(x^2+2)(x^2-2)$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ x^8-16 = (x^2+2x+2)(x^2-2x+2)(x^2+2)(x^2-2)}$$

ii. On vérifie que 1 est racine du polynôme $x^5+x^4+2x^3-4$, ce qui implique que l'on peut le factoriser par $x-1$. On trouve de proche en proche les coefficients du second facteur (on peut aussi poser des coefficients inconnus et résoudre un système).

$$x^5+x^4+2x^3-4 = (x-1)(x^4+2x^3+4x^2+4x+4)$$

Ce polynôme de degré 4 peut encore se factoriser :

$$x^4+2x^3+4x^2+4x+4 = (x^4+4x^2+4)+2x^3+4x = (x^2+2)^2+2x(x^2+2) = (x^2+2)(x^2+2+2x)$$

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ x^5+x^4+2x^3-4 = (x-1)(x^2+2)(x^2+2x+2)}$$

iii. Les questions i. et iii. permettent de simplifier la fonction rationnelle présente dans l'intégrale.

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ \frac{x^5+x^4+2x^3-4}{x^8-16} = \frac{(x-1)(x^2+2)(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)(x^2+2)(x^2-2)} = \frac{x-1}{(x^2-2x+2)(x^2-2)}}$$

(c) L'énoncé donne gentiment la décomposition à démontrer, il s'agit simplement vérifier le résultat :

$$\frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2-2}-\frac{x-2}{x^2-2x+2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{x(x^2-2x+2)-(x-2)(x^2-2)}{(x^2-2)(x^2-2x+2)}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{4x-4}{(x^2-2)(x^2-2x+2)}\right)$$

Ce qui démontre, en utilisant la simplification de la question précédente, que :

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ \frac{x^5+x^4+2x^3-4}{x^8-16} = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2-2}-\frac{x-2}{x^2-2x+2}\right)}$$

(d) Il s'agit d'effectuer le calcul de I en utilisant la décomposition obtenue à la question précédente.

- D'une part, on a : $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2-2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2-2}dx = \frac{1}{2}\Big[\ln(|x^2-2|)\Big]_0^1 = -\frac{\ln(2)}{2}$

- D'autre part, en utilisant la méthode vue en cours :

$$\begin{aligned}
I_2 = \int_0^1 \frac{x-2}{x^2-2x+2}dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x-4}{x^2-2x+2}dx \\
&= \frac{1}{2}\Big(\int_0^1 \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx - \int_0^1 \frac{2}{x^2-2x+2}dx\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\int_0^1 \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx - 2\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2+1}dx\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big[\ln(|x^2-2x+2|)\Big]_0^1 - \Big[\operatorname{Arctan}(x-1)\Big]_0^1 = -\frac{\ln(2)}{2} - \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

D'après le résultat de la question (c), on a : $I = \dfrac{1}{4}\Big(I_1 - I_2\Big) = \dfrac{\pi}{16}$.

$$\boxed{I = \frac{\pi}{16}}$$

2. On reconnait la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{x^8}{16}$. La raison est différente de 1 car $x \in [0,1]$. On a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ S_n(x) = \frac{1-\left(\frac{x^8}{16}\right)^{n+1}}{1-\frac{x^8}{16}}}$$

On a $x \in [0,1]$ ainsi $x^8 \in [0,1]$ et par suite $\dfrac{x^8}{16} \in \Big[0, \dfrac{1}{16}\Big]$. Ceci permet de dire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x^8}{16}\right)^{n+1} = 0$. D'après la question précédente, cela signifie que pour $x \in [0,1]$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \frac{1}{1-\frac{x^8}{16}} = \frac{16}{16-x^8}$$

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \frac{16}{16-x^8}}$$

3. (a) En détaillant le calcul effectué à la question 2.(a), pour $x \in [0,1]$, on a :

$$S_n(x) = \frac{1-\left(\frac{x^8}{16}\right)^{n+1}}{1-\frac{x^8}{16}} = \frac{1}{1-\frac{x^8}{16}} - \frac{\left(\frac{x^8}{16}\right)^{n+1}}{1-\frac{x^8}{16}} = \frac{16}{16-x^8} - \frac{x^{8(n+1)}}{16^{n+1}-16^n x^8} = \frac{16}{16-x^8} - \frac{x^{8(n+1)}}{16^n(16-x^8)}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$, on utilise le calcul précédent et la linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 x^p S_n(x)dx = \int_0^1 x^p\Big(\frac{16}{16-x^8} - \frac{x^{8(n+1)}}{16^n(16-x^8)}\Big)dx = \int_0^1 \frac{16x^p}{16-x^8}dx - \int_0^1 \frac{x^{8(n+1)+p}}{16^n(16-x^8)}dx$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \int_0^1 x^p S_n(x)dx = \int_0^1 \frac{16x^p}{16-x^8}dx - \int_0^1 \frac{x^{8(n+1)+p}}{16^n(16-x^8)}dx}$$

(b) Soient n et p deux entiers naturels et $x \in [0,1]$, on encadre le numérateur et le dénominateur de la fraction proposée :

$$0 \leq x^{8n+p+8} \leq 1$$

$$16^n \leq 16^n(16-x^8) \leq 16^n(16-x^8) \text{ car } 16-x^8 \geq 1 \text{ d'où : } \frac{1}{16^n(16-x^8)} \leq \frac{1}{16^n(16-x^8)} \leq \frac{1}{16^n}$$

On multiplie les deux inégalités obtenues, qui sont à termes positifs, pour obtenir :

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ 0 \leq \frac{x^{8n+p+8}}{16^n(16-x^8)} \leq \frac{1}{16^n}}$$

(c) D'après la propriété de croissance de l'intégrale, nous pouvons intégrer la relation obtenue à la question précédente, ce qui nous donne :

$$\int_0^1 0dx \leq \int_0^1 \frac{x^{8n+p+8}}{16^n(16-x^8)}dx \leq \int_0^1 \frac{1}{16^n}dx$$

C'est-à-dire :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{8n+p+8}}{16^n(16-x^8)}dx \leq \frac{1}{16^n}$$

D'après le théorème d'encadrement, il vient : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{8n+p+8}}{16^n(16-x^8)}dx = 0.$

Reprenons à présent la formule démontrée à la question 3.(a) et passons à la limite pour obtenir :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^p S_n(x)dx = \int_0^1 \frac{16x^p}{16-x^8}dx}$$

(d) En utilisant la linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^p S_n(x)dx &= \int_0^1 x^p\Big(\sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{x^8}{16}\Big)^k\Big)dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{16^k}\int_0^1 x^{p+8k}dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{16^k}\Big[\frac{1}{p+8k+1}x^{p+8k+1}\Big]_0^1 dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{16^k(p+8k+1)}
\end{aligned}$$

On passe à la limite quand n tend vers $+\infty$ en utilisant le résultat de la question précédente :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{16^k(p+8k+1)} = \int_0^1 \frac{16x^p}{16-x^8}dx}$$

(e) En reprenant la définition de l'intégrale I, on a :

$$16I = \int_0^1 \frac{16x^5}{x^8-16}dx + \int_0^1 \frac{16x^4}{x^8-16}dx + 2\int_0^1 \frac{16x^3}{x^8-16}dx - 4\int_0^1 \frac{16}{x^8-16}dx$$

Il suffit alors d'appliquer le résultat de la question précédente avec $p = 5, 4, 3, 0$ respectivement :

$$16I = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{16^n(8n+6)} - \frac{1}{16^n(8n+5)} - \frac{2}{16^n(8n+4)} + \frac{4}{16^n(8n+1)} \right)$$

Étant donné que $16I = \pi$, il vient :

$$\boxed{\pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)}$$