

3 ♡★ Trouver une primitive des fonctions suivantes. On précisera l'ensemble de définition.

$$f_1 : x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{2x+1}{3x^2+3x+7}$$

$$f_4 : x \mapsto 2x(3x^2-1)^3$$

$$f_5 : x \mapsto \operatorname{th}(x)$$

$$f_6 : x \mapsto \frac{1}{(3x-2)^4}$$

$$f_7 : x \mapsto (6x^2+8)\sin(x^3+4x)$$

$$f_8 : x \mapsto (6x+3)\sqrt{x^2+x+1}$$

$$f_9 : x \mapsto \frac{x^2}{(x^3-2)^2}$$

$$f_{10} : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$$

$$f_{11} : x \mapsto \cos^2(x)$$

$$f_{12} : x \mapsto \sqrt{5x+4}$$

$$f_{13} : x \mapsto \tan(x)$$

$$f_{14} : x \mapsto \frac{2x+5}{(x^2+5x+8)^4}$$

$$f_{15} : x \mapsto \cos^3(x)$$

$$f_{16} : x \mapsto \cos(x) \sin(x)$$

$$f_{17} : x \mapsto \frac{3}{1+9x^2}$$

$$f_{18} : x \mapsto \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$f_{19} : x \mapsto \frac{2}{3+2x^2}$$

$$f_{20} : x \mapsto \frac{1-\operatorname{th}^2(x)}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2(x)}}$$

$$f_{21} : x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$$

$$f_{22} : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$$

$$f_{23} : x \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)}$$

$$f_{24} : x \mapsto \ln(x)$$

$$f_{25} : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x(1+\ln(x)^2)}$$

$$f_{26} : x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}$$

$$f_{27} : x \mapsto \tan^2(x)$$

$$f_{28} : x \mapsto \tan^3(x)$$

$$f_{29} : x \mapsto \frac{x^4}{2+x}$$

$$f_{30} : x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{x^2+1}$$

où a, b et c sont réels

Corrigé : ► 1) $f_1 : x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f_1(x) = 2 \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} \quad \text{de la forme } u'e^u \text{ avec } u(x) = \sqrt{x}$$

$$F_1 : x \mapsto 2e^{\sqrt{x}} \text{ définie sur } \mathbb{R}_+$$

► 2) $f_2 : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On reconnaît la forme $u'u$ avec $u(x) = \ln(x)$.

$$F_2 : x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x)^2 \text{ définie sur } \mathbb{R}_+^*$$

► 3) $f_3 : x \mapsto \frac{2x+1}{3x^2+3x+7}$ est définie sur $\mathbb{R}$ car le discriminant du dénominateur est strictement négatif.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_3(x) = \frac{1}{3} \frac{6x+3}{3x^2+3x+7} \quad \text{de la forme } \frac{u'}{u} \text{ avec } u(x) = 3x^2+3x+7$$

$$F_3 : x \mapsto \frac{1}{3} \ln(3x^2+3x+7) \text{ définie sur } \mathbb{R}$$

► 4) $f_4 : x \mapsto 2x(3x^2-1)^3$ est définie sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynomiale. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_4(x) = \frac{1}{3} 6x(3x^2-1)^3 \quad \text{de la forme } u'u^3 \text{ avec } u(x) = 3x^2-1$$

$$F_4 : x \mapsto \frac{1}{12} (3x^2-1)^4 \text{ définie sur } \mathbb{R}$$

► 5) $f_5 : x \mapsto \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$ est définie sur $\mathbb{R}$ d'après le cours. On reconnaît la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \operatorname{ch}(x)$.

$$F_5 : x \mapsto \ln(\operatorname{ch}(x)) \text{ définie sur } \mathbb{R}$$

- 6) $f_6 : x \mapsto \frac{1}{(3x-2)^4}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$, on a :

$$f_6(x) = \frac{1}{3} \frac{3}{(3x-2)^4} \quad \text{de la forme } \frac{u'}{u^4} \text{ avec } u(x) = 3x-2$$

$$F_6 : x \mapsto -\frac{1}{9} \frac{1}{(3x-2)^3} \text{ définie sur } \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

- 7) $f_7 : x \mapsto (6x^2+8)\sin(x^3+4x)$ est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_7(x) = 2(3x^2+4)\sin(x^3+4x) \quad \text{de la forme } u' \sin(u) \text{ avec } u(x) = x^3+4x$$

$$F_7 : x \mapsto -2 \cos(x^3+4x) \text{ définie sur } \mathbb{R}$$

- 8) $f_8 : x \mapsto (6x+3)\sqrt{x^2+x+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$ car le discriminant du trinôme sous la racine carrée est strictement négatif. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_8(x) = 3(2x+1)\sqrt{x^2+x+1} \quad \text{de la forme } u'u^{\frac{1}{2}} \text{ avec } u(x) = x^2+x+1$$

$$F_8 : x \mapsto 2(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}} \text{ définie sur } \mathbb{R}$$

- 9) $f_9 : x \mapsto \frac{x^2}{(x^3-2)^2}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2^{\frac{1}{3}}\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2^{\frac{1}{3}}\}$, on a :

$$f_9(x) = \frac{1}{3} \frac{3x^2}{(x^3-2)^2} \quad \text{de la forme } \frac{u'}{u^2} \text{ avec } u(x) = x^3-2$$

$$F_9 : x \mapsto -\frac{1}{3} \frac{1}{x^3-2} \text{ définie sur } \mathbb{R} \setminus \{2^{\frac{1}{3}}\}$$

- 10) $f_{10} : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ est définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. On reconnaît la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \ln(x)$.

$$F_{10} : x \mapsto \ln(|\ln(x)|) \text{ définie sur }]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

- 11) $f_{11} : x \mapsto \cos^2(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_{11}(x) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2x))$$

$$F_{11} : x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin(2x) \right) \text{ définie sur } \mathbb{R}$$

- 12) $f_{12} : x \mapsto \sqrt{5x+4}$ est définie sur $\left[-\frac{4}{5}, +\infty\right[$. Pour tout $x \in \left[-\frac{4}{5}, +\infty\right[$, on a :

$$f_{12}(x) = \frac{1}{5} \times 5 \times (5x+4)^{\frac{1}{2}} \quad \text{de la forme } u'u^{\frac{1}{2}} \text{ avec } u(x) = 5x+4$$

$$F_{12} : x \mapsto \frac{2}{15} (5x+4)^{\frac{3}{2}} \text{ définie sur } \left[-\frac{4}{5}, +\infty\right[$$

- 13) $f_{13} : x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. On reconnaît la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \cos(x)$.

$$F_{13} : x \mapsto -\ln(|\cos(x)|) \text{ définie sur } \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

► 14) $f_{14} : x \mapsto \frac{2x+5}{(x^2+5x+8)^4}$, est définie sur $\mathbb{R}$ car le discriminant dénominateur est strictement négatif.

On reconnaît la forme $\frac{u'}{u^4}$ avec $u(x) = x^2 + 5x + 8$.

$$F_{14} : x \mapsto -\frac{1}{3} \frac{1}{(x^2+5x+8)^3} \text{ définie sur } \mathbb{R}$$

► $f_{15} : x \mapsto \cos^3(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_{15}(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) = \frac{1}{8} (2\cos(3x) + 6\cos(x)) = \frac{1}{4} (\cos(3x) + 3\cos(x))$$

$$F_{15} : x \mapsto \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \sin(3x) + 3\sin(x) \right) \text{ définie sur } \mathbb{R}$$

► $f_{16} : x \mapsto \cos(x)\sin(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$. On reconnaît la forme $u'u$ avec $u(x) = \sin(x)$.

$$F_{16} : x \mapsto \frac{1}{2} \sin^2(x) \text{ définie sur } \mathbb{R}$$

► $f_{17} : x \mapsto \frac{3}{1+9x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$. On reconnaît la forme $\frac{u'}{1+u^2}$ avec $u(x) = 3x$.

$$F_{17} : x \mapsto \text{Arctan}(3x) \text{ définie sur } \mathbb{R}$$

► $f_{18} : x \mapsto \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ est définie sur $\mathbb{R}$. On reconnaît la forme $\frac{u'}{1+u^2}$ avec $u(x) = e^x$.

$$F_{18} : x \mapsto \text{Arctan}(e^x) \text{ définie sur } \mathbb{R}$$

► $f_{19} : x \mapsto \frac{2}{3+2x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_{19}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{1 + (\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x)^2} \quad \text{de la forme } \frac{u'}{1+u^2} \text{ avec } u(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x$$

$$F_{19} : x \mapsto \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x\right) \text{ définie sur } \mathbb{R}$$

► $f_{20} : x \mapsto \frac{1 - \text{th}^2(x)}{\sqrt{1 - \text{th}^2(x)}}$ est définie sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 < \text{th}(x) < 1$. On reconnaît la forme

$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ avec $u(x) = \text{th}(x)$.

$$F_{20} : x \mapsto \text{Arcsin}(\text{th}(x)) \text{ définie sur } \mathbb{R}$$

► $f_{21} : x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_{21}(x) = \frac{(1+e^x) - e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$F_{21} : x \mapsto x - \ln(1 + e^x) \text{ définie sur } \mathbb{R}$$

► $f_{22} : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$:

$$f_{22}(x) = \frac{(1-x) + x}{1-x^2} = \frac{1-x}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{x}{1-x^2}$$

$$F_{22} : x \mapsto \ln(|1+x|) - \frac{1}{2} \ln(|1-x^2|) \text{ définie sur } \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

Une autre méthode consiste à écrire $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x}$ où α et β sont à déterminer.

► $f_{23} : x \mapsto \frac{1}{\text{sh}^2(x)}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f_{23}(x) = \frac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{sh}^2(x)} = -\frac{\text{sh}^2(x) - \text{ch}^2(x)}{\text{sh}^2(x)} \quad \text{de la forme } \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ avec } u(x) = \text{ch}(x) \text{ et } v(x) = \text{sh}(x)$$

$$F_{23} : x \mapsto -\frac{\text{ch}(x)}{\text{sh}(x)} \text{ définie sur } \mathbb{R}^*$$

► $f_{24} : x \mapsto \ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$, nous l'avons vu en cours, cette primitive se détermine à l'aide d'une intégration par partie.

$$F_{24} : x \mapsto x \ln(x) - x \text{ définie sur } \mathbb{R}_+^*$$

► $f_{25} : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x(1+\ln(x)^2)}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On reconnaît la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1 + \ln(x)^2$.

$$F_{25} : x \mapsto \frac{1}{2} \ln(1 + \ln(x)^2) \text{ définie sur } \mathbb{R}_+^*$$

► $f_{26} : x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}$ est définie sur $\left] -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right[$. Pour tout $x \in \left] -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right[$, on a :

$$f_{26}(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-(\sqrt{2}x)^2}} \quad \text{de la forme } -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \text{ avec } u(x) = \sqrt{2}x$$

$$F_{26} : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Arccos}(\sqrt{2}x) \text{ définie sur } \left] -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right[$$

► $f_{27} : x \mapsto \tan^2(x)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, on a :

$$f_{27}(x) = 1 + \tan^2(x) - 1$$

$$F_{27} : x \mapsto \tan(x) - x \text{ définie sur } \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

► $f_{28} : x \mapsto \tan^3(x)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, on a :

$$f_{28}(x) = \tan(x)(1 + \tan^2(x)) - \tan(x) \quad \text{de la forme } u'u - u \text{ avec } u(x) = \tan(x)$$

$$F_{28} : x \mapsto \frac{1}{2} \tan^2(x) + \ln(|\cos(x)|) \text{ définie sur } \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

► $f_{29} : x \mapsto \frac{x^4}{2+x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. On a :

$$x^4 = (x+2)(x^3 - 2x^2 + 4x - 8) + 16$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, on a :

$$f_{29}(x) = \frac{(x+2)(x^3 - 2x^2 + 4x - 8) + 16}{x+2} = x^3 - 2x^2 + 4x - 8 + \frac{16}{x+2}$$

$$F_{29} : x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 8x + 16 \ln(|x+2|) \text{ définie sur } \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

► Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $f_{30} : x \mapsto \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + 1}$ qui est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_{30}(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + 1} = \frac{a(x^2 + 1) + bx + c - a}{x^2 + 1} = a + \frac{bx}{x^2 + 1} + \frac{c - a}{x^2 + 1}$$

$$F_{30} : x \mapsto ax + \frac{b}{2} \ln(x^2 + 1) + (c - a) \operatorname{Arctan}(x) \text{ définie sur } \mathbb{R}$$