1-Vrai ou faux : une intersection d'intervalles ouverts est un intervalle ouvert.

2-Vrai ou faux : une union de parties convexes de $\mathbb{R}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}$.

3-Vrai ou faux : si la suite $(|x_n|)$ converge vers l, la suite (x_n) converge vers l ou $-l$.

4-Vrai ou faux : si $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$, les suites (x_n) et (y_n) convergent vers la même limite.

5-Vrai ou faux : le produit d'une suite qui converge vers 0 et d'une suite quelconque converge vers 0.

6-Vrai ou faux : toute suite encadrée par deux suites convergentes est convergente.

7-Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \dbinom{2n}{n}$. Démontrer que (u_n) tend vers $+\infty$.

1-Vrai ou faux : une intersection d'intervalles ouverts est un intervalle ouvert.

Réponse : C'est faux en général :

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left] -1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n} \right[= [-1, 1]$$

En effet, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $-1-\dfrac{1}{n} \leq x \leq 1+\dfrac{1}{n}$ alors $-1 \leq x \leq 1$ en passant à la limite. Réciproquement si $x \in [-1, 1]$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1-\dfrac{1}{n} \leq x \leq 1+\dfrac{1}{n}$ donc $x \in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left] -1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n} \right[$.

2-Vrai ou faux : une union de parties convexes de $\mathbb{R}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}$.

Réponse : Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles. Il est faux qu'une union d'intervalles est un intervalle. Par exemple $[0, 1] \cup [2, 3]$ n'est pas un intervalle.

3-Si la suite $(|x_n|)$ converge vers l, la suite (x_n) converge vers l ou $-l$.

Réponse : C'est faux la suite $((-1)^n)$ n'a pas de limite pourtant sa valeur absolue tend bien vers 1.

4-Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$, les suites (x_n) et (y_n) convergent vers la même limite.

Réponse : C'est faux car rien ne dit que les deux suites convergent. On peut prendre $x_n = y_n = n$. On constate que (x_n) et (y_n) ne convergent pas bien que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$.

5-Le produit d'une suite qui converge vers 0 et d'une suite quelconque converge vers 0.

Réponse : C'est faux $\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0 mais $\left(n^2 \times \frac{1}{n}\right)$ ne tend pas vers 0.

6-Vrai ou faux : Toute suite encadrée par deux suites convergentes est convergente.

Réponse : C'est faux. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$-2 \leq (-1)^n \leq 2$$

Les suites (2) et (-2) convergent car elles sont constantes mais la suite $((-1)^n)$ diverge.

7-Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \binom{2n}{n}$. Démontrer que (u_n) tend vers $+\infty$.

Réponse : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ qui ne s'annule pas. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 2\frac{2n+1}{n+1} \geq 2$$

Ce qui démontre que la suite (u_n) est strictement croissante.

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\mathcal{H}_n \ : \ u_n \geq 2^n$$

- $u_0 = 1 \geq 2^0$, ce qui démontre que $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- On suppose que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a :

$$u_{n+1} \geq 2u_n \geq 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

Ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
D'après le théorème de comparaison la suite (u_n) tend vers $+\infty$, ainsi elle n'est pas majorée.