$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2-y^2=x-y$$

Soient $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

• **Réflexivité.** On a $x^2-x^2=x-x$ donc $x\mathcal{R}x$.

• **Transitivité.** On suppose que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, c'est-à-dire $x^2-y^2=x-y$ et $y^2-z^2=y-z$. En sommant les deux égalités, on obtient : $x^2-z^2=x-z$. On en déduit que $x\mathcal{R}z$.

• **Symétrie.** On suppose que $x\mathcal{R}y$, c'est-à-dire $x^2-y^2=x-y$. En multipliant cette égalité par -1, on obtient $y^2-x^2=y-x$. On en déduit que $y\mathcal{R}x$.

$\boxed{\mathcal{R} \text{ est une relation d'équivalence}}$

On fixe $x \in \mathbb{R}$. Pour $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
y \in Cl(x) &\Leftrightarrow x\mathcal{R}y \\
&\Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y \\
&\Leftrightarrow (x-y)(x+y) = x - y \\
&\Leftrightarrow (x-y)(x+y-1) = 0 \\
&\Leftrightarrow y = x \text{ ou } y = 1 - x
\end{aligned}$$

$$\boxed{Cl(x) = \{x, 1-x\}}$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xe^y = ye^x$$

Soient $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

• **Réflexivité.** On a $xe^x = xe^x$ donc $x\mathcal{R}x$.

• **Transitivité.** On suppose que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, c'est-à-dire $xe^y = ye^x$ et $ye^z = ze^y$. En utilisant ces deux égalités, on a :

$$xe^z = (ye^x e^{-y})e^z = (e^x e^{-y})(ye^z) = (e^x e^{-y})(ze^y) = ze^x$$

On en déduit que $x\mathcal{R}z$.

• **Symétrie.** On suppose que $x\mathcal{R}y$, c'est-à-dire $xe^y = ye^x$. Il est alors évident que $ye^x = xe^y$. On en déduit que $y\mathcal{R}x$.

$\boxed{\mathcal{R} \text{ est une relation d'équivalence}}$

On fixe $x \in \mathbb{R}$. Pour $y \in \mathbb{R}$, on a :

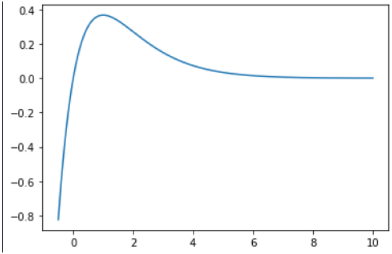
$$\begin{aligned} y \in Cl(x) &\Leftrightarrow x\mathcal{R}y \\ &\Leftrightarrow xe^y = ye^x \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{e^x} = \frac{y}{e^y} \\ &\Leftrightarrow f(x) = f(y) \end{aligned}$$

avec $f \ : \ t \mapsto \dfrac{t}{e^t} = te^{-t}$ définie sur $\mathbb{R}$.

On étudie rapidement la fonction f qui est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ f'(t) = (1-t)e^{-t}$$

On en déduit que f est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. De plus $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.



Si $x \in]-\infty, 0[\cup \{1\}$ alors $f(x)$ n'a qu'un seul antécédent x donc $Cl(x) = \{x\}$.

Si $x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$ alors $f(x)$ a deux antécédents donc $Cl(x)$ possède 2 éléments.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \propto y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$$

Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

• **Réflexivité.** On a $f(x) \leq f(x)$ donc $x \propto x$.

• **Transitivité.** On suppose que $x \propto y$ et $y \propto z$, c'est-à-dire $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(z)$. En utilisant ces deux inégalités, on a $f(x) \leq f(z)$ donc $x \propto z$.

• **Antisymétrie.** On suppose que $x \propto y$ et $y \propto x$, c'est-à-dire que $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(x)$. On en déduit que $f(x) = f(y)$ et par injectivité de f : $x = y$.

$\boxed{\mathcal{R} \text{ est une relation d'ordre}}$

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ y = x^n$$

Soient $(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$.

• **Réflexivité.** On a $x = x^1$ donc $x\mathcal{R}x$.

• **Transitivité.** On suppose que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, c'est-à-dire qu'il existe $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $y = x^m$ et $z = y^n$. On en déduit que $z = x^{mn}$ avec $mn \in \mathbb{N}$ donc $x\mathcal{R}z$.

• **Antisymétrie.** On suppose que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, c'est-à-dire qu'il existe $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $y = x^m$ et $x = y^n$. On en déduit que $x = x^{mn}$. Ce qui donne $\ln(x) = mn\ln(x)$ ou encore $\ln(x)(1-mn) = 0$.
Soit $x = 1$ et dans ce cas $y = 1$ et on a bien $x = y$. Soit $mn = 1$ et comme ce sont des entiers naturels $m = n = 1$ donc $x = y$.

$\boxed{\mathcal{R} \text{ est une relation d'ordre}}$

Enfin, cette relation n'est pas totale car 2 et 3 ne sont pas comparables.
En effet, il est impossible de trouver un entier naturel n tel que :

$$3 = 2^n \text{ ou } 2 = 3^n$$