

On se place dans l'anneau $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \times)$. L'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 est-il un sous-anneau ?
Démontrer que l'ensemble des fonctions polynomiales, noté $\mathbb{R}[X]$, est un sous-anneau intègre.

On se place dans l'anneau $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \times)$. L'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 est-il un sous-anneau ?
Démontrer que l'ensemble des fonctions polynomiales, noté $\mathbb{R}[X]$, est un sous-anneau intègre.

Réponse : Le produit de deux fonctions polynomiales de degré 2 est une fonction polynomiale de degré 4. Ainsi l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 n'est pas stable par produit : ce n'est pas un sous-anneau.

On vérifie sans problème que $\mathbb{R}[X]$ est un sous-anneau de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour démontrer qu'il est intègre, donnons-nous deux fonctions polynomiales P et Q telles que : $PQ = 0$, c'est-à-dire que : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)Q(x) = 0$. Ceci démontre que P ou Q a une infinité de racines donc est égal au polynôme nul.