

On se place dans l'anneau  $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \times)$ . L'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 est-il un sous-anneau ?  
Démontrer que l'ensemble des fonctions polynomiales, noté  $\mathbb{R}[X]$ , est un sous-anneau intègre.

On se place dans l'anneau  $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \times)$ . L'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 est-il un sous-anneau ?

Démontrer que l'ensemble des fonctions polynomiales, noté  $\mathbb{R}[X]$ , est un sous-anneau intègre.

---

**Réponse :** Le produit de deux fonctions polynomiales de degré 2 est un fonction polynomiale de degré 4. Ainsi l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 n'est pas stable par produit : ce n'est pas un sous-anneau.

On vérifie sans problème que  $\mathbb{R}[X]$  est un sous-anneau de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Pour démontrer qu'il est intègre, donnons-nous deux fonctions polynomiales  $P$  et  $Q$  telles que :  $PQ = 0$ , c'est-à-dire que :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $P(x)Q(x) = 0$ . Ceci démontre que  $P$  ou  $Q$  a une infinité de racines donc est égal au polynôme nul.