21 ★★★ Soient A et B deux parties d'un ensemble E et $f: \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X\cap A, X\cap B) \end{array}$.

a) Montrer que f est injective si et seulement si $A\cup B=E$.
b) Montrer que f est surjective si et seulement si $A\cap B=\emptyset$.

Corrigé : Remarquons déjà que l'application f est correctement définie puisque pour tout $X\in\mathcal{P}(E)$, on a $X\cap A\in\mathcal{P}(A)$ et $X\cap B\in\mathcal{P}(B)$.

a) Nous allons démontrer cette équivalence par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons f injective. On a $f(E)=(E\cap A, E\cap B)=(A,B)$ et $f(A\cup B)=((A\cup B)\cap A,(A\cup B)\cap B)=(A,B)$. Ainsi on a $f(E)=f(A\cup B)$ étant donné que f est injective ceci implique que $E=A\cup B$, ce qu'il fallait démontrer.

($\Leftarrow$) Supposons que $A\cup B=E$ et démontrons que f est injective. Soient $(X,X')\in\mathcal{P}(E)^2$ tels que $\underline{f(X)=f(X')}$, c'est-à-dire $(X\cap A, X\cap B)=(X'\cap A, X'\cap B)$. En identifiant, ceci implique :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} X\cap A & = & X'\cap A & (1) \\ X\cap B & = & X'\cap B & (2) \end{array}\right.$$

Effectuons la réunion de ces deux relations, cela donne : $(X\cap A)\cup(X\cap B)=(X'\cap A)\cup(X'\cap B)$, on utilise la propriété du cours sur la distributivité pour obtenir : $X\cap(A\cup B)=X'\cap(A\cup B)$. Or, par hypothèse, $(A\cup B)=E$. Ce qui donne $X\cap E=X'\cap E$, c'est-à-dire $\underline{X=X'}$. Ce qui démontre que f est injective.

$$\boxed{f \text{ est injective si et seulement si } A\cup B=E}$$

b) Là aussi, nous allons procéder par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons f surjective. En particulier l'élément de l'espace d'arrivée $(A,\emptyset)$ admet un antécédent par f, notons X cet antécédent. On a $f(X)=(A,\emptyset)$, d'où $X\cap A=A$ et $X\cap B=\emptyset$. Ainsi :

$$A\cap B=(X\cap A)\cap B=(X\cap B)\cap A=\emptyset\cap A=\emptyset$$

Ce qui démontre que si f est surjective alors $A\cap B=\emptyset$.

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que $A\cap B=\emptyset$ et montrons que f est surjective. Prenons un élément de l'espace d'arrivée : $(Y,Y')\in\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$ et trouvons lui un antécédent par f. Un rapide dessin suffit à comprendre que $Y\cup Y'$ va être un antécédent possible, en effet :

$$f(Y\cup Y')=((Y\cup Y')\cap A,(Y\cup Y')\cap B)=((Y\cap A)\cup(Y'\cap A),(Y\cap B)\cup(Y'\cap B))=(Y,Y')$$

Cette dernière égalité est vraie car :
- $Y\cap A=Y$ puisque Y est une partie de A.
- $Y'\cap A=\emptyset$ puisque $Y'\subset B$ et A et B sont disjoints par hypothèse.
- $Y\cap B=\emptyset$ puisque $Y\subset A$ et A et B sont disjoints.
- $Y'\cap B=Y'$ puisque Y' est une partie de B.

Finalement $Y\cup Y'$ est un antécédent par f de (Y,Y'), donc f est surjective.

$$\boxed{f \text{ est surjective si et seulement si } A\cap B=\emptyset}$$