

1-Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  avec  $f$  paire et  $g$  impaire. Est-il vrai que  $g \circ f$  est paire ? Est-il vrai que  $f \circ g$  est paire ?

2-Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , avec  $f$  2-périodique et  $g$  3-périodique. Démontrer que  $f \times g$  est périodique.

3-Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Vrai ou faux :

si  $f$  est croissante et  $f(a) \leq f(b)$  alors  $a \leq b$

4-Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  strictement croissante et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Vrai ou faux :

$$f(a) \leq f(b) \Rightarrow a \leq b$$

5-La somme de deux fonctions monotones est-elle aussi une fonction monotone ?

6-Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction monotone strictement négative. La fonction  $\frac{1}{f}$  est-elle monotone sur  $\mathbb{R}$  ?

7-Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable et paire. Démontrer que  $f'$  est impaire.

1-Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  avec  $f$  paire et  $g$  impaire. Est-il vrai que  $g \circ f$  est paire ? Est-il vrai que  $f \circ g$  est paire ?

---

**Réponse :** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

Ce qui démontre que  $g \circ f$  est paire. D'autre part :

$$f \circ g(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) = f \circ g(x)$$

Ce qui démontre que  $f \circ g$  est paire.

2-Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , avec  $f$  2-périodique et  $g$  3-périodique. Démontrer que  $f \times g$  est périodique.

---

**Réponse :** Soit  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $x + 6 \in \mathbb{R}$  et :  $(f \times g)(x + 6) =$

$$f(x + 6)g(x + 6) = f(x + 2 + 2 + 2)g(x + 3 + 3) = f(x)g(x) = (f \times g)(x)$$

Ce qui démontre que  $f \times g$  est 6-périodique.

3-Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Vrai ou faux :

si  $f$  est croissante et  $f(a) \leq f(b)$  alors  $a \leq b$

---

**Réponse :** C'est faux, prenons la fonction constante égale à 1 définie sur  $\mathbb{R}$ . C'est une fonction croissante et si l'on prend  $a = 3$  et  $b = 2$ , on a :

$$f(a) \leq f(b) \text{ mais } a > b$$

4-Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  strictement croissante et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Vrai ou faux :

$$f(a) \leq f(b) \Rightarrow a \leq b$$

---

**Réponse :** C'est vrai, la contraposée s'écrit :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a > b \Rightarrow f(a) > f(b)$$

Ceci constitue la définition de  $f$  strictement croissante.

5-La somme de deux fonctions monotones est-elle aussi une fonction monotone ?

---

**Réponse :** C'est faux, donnons un contre-exemple. On se place sur  $\mathbb{R}_+$ , on a  $f : x \mapsto x$  qui est croissante et  $g : x \mapsto -x^2$  qui est décroissante. Pourtant :

$$f + g : x \mapsto x - x^2$$

n'est ni croissante si décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ , ce que l'on voit en faisant le tableau de variation.

6-Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction monotone strictement négative. La fonction  $\frac{1}{f}$  est-elle monotone sur  $\mathbb{R}$  ?

---

**Réponse :** Posons  $g : x \mapsto \frac{1}{x}$  définie sur  $\mathbb{R}_-^*$ , cette fonction est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_-^*$ . La fonction  $\frac{1}{f}$  est égale à  $g \circ f$  (qui a un sens car  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_-^*$ ) : cette fonction est monotone comme composée de fonctions monotones.

7-Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable et paire. Démontrer que  $f'$  est impaire.

---

**Réponse :** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :  $f(-x) = f(x)$ . On dérive cette relation,  $f$  étant dérivable sur  $\mathbb{R}$ , cela donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -f'(-x) = f'(x)$$

C'est-à-dire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(-x) = -f'(x)$ . On en déduit que  $f'$  est impaire.