Problème

A-Exemples de suites de parties décimales

Le but de cette partie est de se familiariser avec les notations introduites en étudiant tout d'abord un exemple de suite qui n'est pas dense dans $[0,1[$. Dans la question 3., on met en évidence un critère qui garantit que certaines suites, dites à croissance lente, sont denses dans $[0,1[$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x-1<\lfloor x\rfloor \leq x \Leftrightarrow -x \leq -\lfloor x\rfloor<1-x \Leftrightarrow 0 \leq x-\lfloor x\rfloor<1$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ M(x) \in[0,1[}$$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{Z}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $nx \in \mathbb{Z}$, d'où :

$$u_n=M(nx)=nx-\lfloor nx\rfloor=nx-nx=0$$

$$\boxed{\text{Si } x \in \mathbb{Z},\ \text{alors } (u_n) \text{ est la suite nulle}}$$

(b) i. On a les premiers termes de la suite u_n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u_n	0	0,4	0,8	0,2	0,6	0	0,4	0,8	0,2	0,6	0	0,4

La suite (u_n) semble être périodique, avec une période de longueur 5 : $0,\ \frac{2}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{3}{5}$.

ii. Soit $n \in \mathbb{N}$, il s'agit de démontrer que $u_{n+q}=u_n$. On a :

$$u_{n+q}=(n+q)\frac{p}{q}-\left\lfloor(n+q)\frac{p}{q}\right\rfloor=n\frac{p}{q}+p-\left\lfloor n\frac{p}{q}+p\right\rfloor=n\frac{p}{q}+p-\left\lfloor n\frac{p}{q}\right\rfloor-p=n\frac{p}{q}-\left\lfloor n\frac{p}{q}\right\rfloor=u_n$$

iii. La suite (u_n) étant périodique de période q, elle prend au plus q valeurs distinctes (exactement q valeurs si p et q sont premiers entre eux). Il est clair qu'il est possible de trouver, dans l'intervalle $[0,1[$, $q+1$ intervalles non triviaux et disjoints par exemple la famille d'intervalles $\left[\frac{2i}{2(q+1)}, \frac{2i+1}{2(q+1)}\right]$ où $0 \leq i \leq q$.

Etant donné que la suite (u_n) prend au plus q valeurs, il y aura l'un de ces $q+1$ intervalles qui ne contiendra pas de terme de la suite (u_n). Ce qui démontre que (u_n) n'est pas dense dans $[0,1[$.

$$\boxed{\text{Si } x \in \mathbb{Q} \text{ alors la suite } (M(nx)) \text{ n'est pas dense dans } [0,1[}$$

3. (a) i. La suite (n^2) est croissante et tend vers $+\infty$ mais $(n+1)^2-n^2=2n+1$ ne tend pas vers 0.

$$\boxed{(n^2) \text{ n'est pas à croissance lente}}$$

ii. La suite $(\sqrt{n})$ est croissante et tend vers $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant la quantité conjuguée, il vient :

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{(\sqrt{n}) \text{ est à croissance lente}}$$

iii. La suite $(\ln(n))_{n\geq 1}$ est croissante et tend vers $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

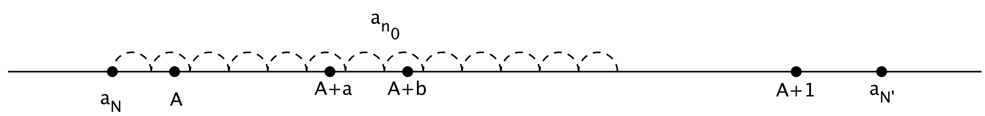
$$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{(\ln(n))_{n\geq 1} \text{ est à croissance lente}}$$

(b) i. C'est exactement la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$, étant donné que $a < b$, on a bien $\varepsilon > 0$.

ii. La suite (a_n) tend vers $+\infty$, d'où l'existence de $N' \geq N$ tel que $u_{N'} \geq A + 1$.

iii. L'idée est la suivante : $a_N < A$ par définition de A et $a_{N'} \geq A + 1$ avec $N' \geq N$. Or, à partir du rang N, la différence entre deux termes consécutifs de la suite (a_n) est inférieure ou égale à ε, la suite étant croissante, il y aura nécessairement un terme de la suite qui va tomber dans l'intervalle $[A + a, A + b]$ puisque cet intervalle est de longueur 2ε. Ainsi il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_{n_0} \in [A + a, A + b]$.



Vous aurez remarqué que l'hypothèse de croissance de la suite (a_n) clarifie la situation mais n'est pas nécessaire.

iv. Comme A est un entier, que $0 \leq a < b \leq 1$ et que $a_{n_0} \in [A + a, A + b]$, on a $\lfloor a_{n_0} \rfloor = A$. Ainsi :

$$A + a \leq a_{n_0} \leq A + b \Leftrightarrow A + a - A \leq a_{n_0} - \lfloor a_{n_0} \rfloor \leq A + b - A \Leftrightarrow a \leq M(a_{n_0}) \leq b$$

En résumé, pour tous $(a, b) \in [0, 1[^2$ tels que $0 \leq a < b < 1$, on a trouvé $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $M(a_{n_0}) \in [a, b]$, ceci est la définition de :

$$\boxed{(M(a_n)) \text{ est dense dans } [0, 1[}$$

v. D'après la question 3.(a), les suites $(\sqrt{n})$ et $(\ln(n))_{n\geq 1}$ sont à croissance lente, ainsi $(M(\sqrt{n}))$ et $(M(\ln(n)))$ sont deux suites denses dans $[0, 1[$.

B-Spectre d'un nombre réel

1. (a) Pour $x = 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lfloor nx \rfloor = \lfloor n \rfloor = n$.

$$\boxed{Sp(1) = \mathbb{N}^*}$$

(b) Pour $x = \dfrac{1}{2}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lfloor 2nx \rfloor = \lfloor n \rfloor = n$. On a montré ainsi que $\mathbb{N}^* \subset Sp\Big(\dfrac{1}{2}\Big)$ et réciproquement $Sp\Big(\dfrac{1}{2}\Big) \subset \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{Sp\Big(\frac{1}{2}\Big) = \mathbb{N}^*}$$

(c) Pour $x = 3$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lfloor nx \rfloor = \lfloor 3n \rfloor = 3n$. On en déduit que :

$$\boxed{Sp(3) = \{3n,\ n \in \mathbb{N}^*\} = 3\mathbb{N}^*}$$

(d) Soit $x = \dfrac{5}{2}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, il y a deux cas à considérer :

- si n est pair, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2p$ et dans ce cas :

$$\lfloor nx \rfloor = \lfloor 5p \rfloor = 5p$$

- si n est impair, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2q + 1$ et dans ce cas :

$$\lfloor nx \rfloor = \left\lfloor \frac{5}{2}(2q+1) \right\rfloor = 5q + 2$$

On en déduit que :

$$\boxed{Sp\left(\frac{5}{2}\right) = \{5p,\ p \in \mathbb{N}^*\} \cup \{5q+2,\ q \in \mathbb{N}\}}$$

2. (a) Par définition, le spectre de x est égal à l'image de f_x.

$$\boxed{Sp(x) = \mathrm{Im}(f_x) = f_x(\mathbb{N}^*)}$$

(b) i. Soit $x \in]0,1[$, on a :

$$mx < m - 1 \Leftrightarrow m > \frac{1}{1-x}$$

Ainsi, il est possible de choisir $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $mx < m - 1$. Dans ce cas, $f_x(m) = \lfloor mx \rfloor \leq m - 2$, en effet un réel strictement inférieur à $m - 1$ possède une partie entière inférieure ou égale à $m - 2$.

ii. On suppose que f_x est injective, démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{H}_n \ : \ f_x(n) \geq n - 1$$

- **Initialisation.** Pour $n = 1$, on a $f_x(1) = \lfloor x \rfloor = 0$ car $x \in]0,1[$. On a bien $f_x(1) \geq 0$.
- **Hérédité.** On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a donc $f_x(n) \geq n - 1$. On a $nx < (n+1)x$ et par croissance de la fonction partie entière $f_x(n) \leq f_x(n+1)$. Cependant comme f_x est supposée injective, on a forcément $f_x(n) < f_x(n+1)$, ce qui donne $f_x(n+1) > n - 1$ mais comme ce sont des entiers : $f_x(n+1) \geq n$. Ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et termine la récurrence.

iii. Les deux résultats obtenus dans les deux questions précédentes sont clairement contradictoires, on en déduit que f_a n'est pas injective.

(c) Soit $p \in \mathbb{N}$, on cherche donc un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$p \leq nx < p + 1 \Leftrightarrow \frac{p}{x} \leq n < \frac{p}{x} + \frac{1}{x}$$

On voit que l'on peut choisir $n = \left\lfloor \dfrac{p}{x} \right\rfloor + 1$ puisque l'on aura bien :

$$\frac{p}{x} \leq \left\lfloor \frac{p}{x} \right\rfloor + 1 < \frac{p}{x} + \frac{1}{x}$$

ceci car $x \in]0,1[$ donc $\dfrac{1}{x} > 1$.

On en déduit que $f_x(n) = \lfloor nx \rfloor = p$ puisque $p \leq nx < p + 1$. L'entier $p \in \mathbb{N}$ étant quelconque, on en déduit que f_x est surjective.

(d) D'après la question précédente, f_x étant surjective, on a :

$$\boxed{Sp(x) = \mathbb{N}^*}$$

3. (a) Soit $x \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrons que $f_x(n+1) > f_x(n)$. On a :

$$\lfloor (n+1)x \rfloor > (n+1)x - 1 = nx + x - 1 \geq nx \geq \lfloor nx \rfloor$$

On en déduit que f_x est strictement croissante donc elle ne prend pas deux fois la même valeur et :

$$\boxed{f_x \text{ injective}}$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 1$, il est clair que $nx \geq 1$ ainsi $f_x(n) \geq 1$ et on voit alors que 0 n'a pas d'antécédent par f_x.

$$\boxed{f_x \text{ non surjective}}$$

(c) • Déjà, si $x \geq 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lfloor nx \rfloor \geq 2n$. Ainsi dans l'intervalle $[\![1, 2n]\!]$, il y a au moins n entiers qui n'appartiennent pas au spectre de x. Ceci étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il y a bien une infinité d'entiers strictement positifs ne faisant pas partie du spectre de x.

• Soit $x \in]1, 2[$, il est possible d'écrire $x = 1 + r$ avec $r \in]0, 1[$. Soit $j \in \mathbb{N}^*$, on considère un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $Nr > j$, cet entier existe bien car $\lim\limits_{N \to +\infty} Nr = +\infty$. On a alors $Nx = N + Nr > N + j$ donc par croissance de la partie entière $\lfloor Nx \rfloor \geq N + j$. Ainsi, dans l'intervalle $[\![1, N + j]\!]$, il y a au moins j entiers qui n'appartiennent pas au spectre de x. Ceci étant valable pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on en déduit qu'il y a encore dans ce cas une infinité d'entiers n'appartenant pas au spectre de x.

$$\boxed{\text{Si } x > 1 \text{ alors le complémentaire du spectre de } x \text{ est infini}}$$

4. (a) Pour démontrer que Sp est injective, il s'agit de prendre deux réels strictement positifs x et y avec par exemple $x < y$ et de montrer que $Sp(x) \neq Sp(y)$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N(y - x) > 1$, c'est-à-dire $Ny > Nx + 1$. Ce qui implique $\lfloor Ny \rfloor > \lfloor Nx \rfloor$. Ainsi $Sp(y)$ contient moins de N éléments inférieurs ou égaux à $\lfloor Nx \rfloor$ tandis que $Sp(x)$ contient N éléments inférieurs ou égaux à $\lfloor Nx \rfloor$. On en déduit que les spectres de x et y sont distincts.

$$\boxed{Sp \text{ est injective}}$$

(b) L'application Sp n'est clairement pas surjective car pour $x > 0$, il est clair que $\lim\limits_{n \to +\infty} nx = +\infty$. On en déduit que $Sp(x)$ n'est pas bornée. Une partie finie de $\mathbb{N}^*$ n'aura pas d'antécédent par l'application Sp.

$$\boxed{Sp \text{ n'est pas surjective}}$$

5. (a) On a $Sp(4) = \{4n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ et $Sp(10) = \{10n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$. Or pour $p \in \mathbb{N}^*$:

$$4|p \text{ et } 10|p \Leftrightarrow 20|p$$

On a donc :

$$\boxed{Sp(4) \cap Sp(10) = Sp(20)}$$

(b) Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, comme dans la question précédente $Sp(a)$ est l'ensemble des multiples strictement positifs de a et $Sp(b)$ est l'ensemble des multiples strictement positifs de b. De même, par définition du ppcm de a et b que l'on note $a \wedge b$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$a|p \text{ et } b|p \Leftrightarrow (a \wedge b)|p$$

On en déduit que :

$$\boxed{Sp(a) \cap Sp(b) = Sp(a \wedge b)}$$

C-Théorème de Beatty

1. (a) Pour une partition, nous devons avoir par définition :
   - $Sp(a) \neq \emptyset$ et $Sp(b) \neq \emptyset$.
   - $Sp(a) \cup Sp(b) = \mathbb{N}^*$.
   - $Sp(a) \cap Sp(b) = \emptyset$.

   (b) i. On peut prendre $A = \{1\}$ et $B = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

   ii. On peut choisir $A = 2\mathbb{N}^*$ (les entiers naturels pairs non nuls) et $B = \mathbb{N}^* \setminus A$.

   (c) Prenons le nombre irrationnel le plus simple que nous connaissons $a = \sqrt{2}$. L'énoncé demande explicitement de démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel, il s'agit de restituer la preuve vue dans le chapitre 2. Pour ce choix de a, nous avons :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{b} = 1 - \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{b} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+2$$

   Cette valeur trouvée est irrationnelle, en effet si l'on suppose par l'absurde que $\sqrt{2}+2 = r \in \mathbb{Q}$ alors $\sqrt{2} = r - 2 \in \mathbb{Q}$ ce qui n'est pas le cas.

$$\boxed{a = \sqrt{2} \text{ et } b = \sqrt{2}+2}$$

2. (a) Avec l'encadrement fourni dans l'énoncé, on trouve les premiers entiers du spectre de $\sqrt{2}$:

$$1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14$$

   Ainsi :

$$u_1(\sqrt{2}) = 1,\ u_2(\sqrt{2}) = 2,\ u_3(\sqrt{2}) = 2,\ u_4(\sqrt{2}) = 3,\ u_5(\sqrt{2}) = 4$$
$$u_6(\sqrt{2}) = 4,\ u_7(\sqrt{2}) = 5,\ u_8(\sqrt{2}) = 6,\ u_9(\sqrt{2}) = 7,\ u_{10}(\sqrt{2}) = 7$$

   (b) i. Soit $(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $k > l$. En utilisant $a > 1$, on a :

$$ka - la = (k-l)a > k - l \geq 1$$

   On en déduit que :

$$\lfloor la \rfloor \leq la < ka - 1 < \lfloor ka \rfloor$$

   Ce qui montre bien que $\lfloor ka \rfloor \neq \lfloor la \rfloor$.

ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N},\ \lfloor ka \rfloor \leq n\}$ est une partie de $\mathbb{N}$, non vide car ayant 0 pour élément et majorée par n donc elle possède un maximum que l'on note p.

• Par définition du maximum, nous avons $\lfloor pa \rfloor \leq n$. Or $pa - 1 < \lfloor pa \rfloor$ donc $pa < n+1$ et en divisant par $a > 0$, nous obtenons bien :

$$p < \frac{n+1}{a}$$

• Toujours par définition du maximum, $p+1$ n'appartient pas à l'ensemble donc $\lfloor (p+1)a \rfloor > n$ et comme ce sont des entiers $\lfloor (p+1)a \rfloor \geq n+1$. D'autre part, $\lfloor (p+1)a \rfloor \leq (p+1)a$. Ainsi, nous obtenons $n+1 \leq (p+1)a$ et en divisant par $a > 0$:

$$p \geq \frac{n+1}{a} - 1$$

Finalement, nous obtenons l'inégalité voulue :

$$\frac{n+1}{a} - 1 \leq p < \frac{n+1}{a}$$

iii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq a$. On note toujours $p = \max\{k \in \mathbb{N},\ \lfloor ka \rfloor \leq n\}$. On a $p \geq 1$ car $a > 1$. On en déduit que :

$$[\![1, n]\!] \cap Sp(a) = \{k \in \mathbb{N}^*,\ \lfloor ka \rfloor \leq n\} = \{\lfloor ka \rfloor,\ k \in [\![1, p]\!]\}$$

Or les éléments de cet ensemble sont distincts d'après la question i., ainsi :

$$u_n(a) = \mathrm{Card}([\![1, n]\!] \cap Sp(a)) = p$$

L'inégalité de la question précédente, nous donne alors le résultat :

$$\frac{n+1}{a} - 1 \leq u_n(a) < \frac{n+1}{a}$$

iv. On divise l'inégalité précédente par $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{n+1}{na} - \frac{1}{n} \leq \frac{u_n(a)}{n} < \frac{n+1}{na}$$

D'après le théorème d'encadrement, nous avons :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n(a)}{n} = \frac{1}{a}}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

i. Par hypothèse de l'énoncé, $Sp(a)$ et $Sp(b)$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$ donc $Sp(a) \cup Sp(b) = \mathbb{N}^*$. On a par distributivité :

$$[\![1, n]\!] = [\![1, n]\!] \cap \mathbb{N}^* = [\![1, n]\!] \cap (Sp(a) \cup Sp(b)) = ([\![1, n]\!] \cap Sp(a)) \cup ([\![1, n]\!] \cap Sp(b))$$

ii. Par définition d'une partition, on a $Sp(a) \cap Sp(b) = \emptyset$ ainsi :

$$([\![1, n]\!] \cap Sp(a)) \cap ([\![1, n]\!] \cap Sp(b)) = [\![1, n]\!] \cap Sp(a) \cap Sp(b) = \emptyset$$

iii. Finalement, avec les deux questions précédentes, $[\![1, n]\!] \cap Sp(a)$ et $[\![1, n]\!] \cap Sp(b)$ sont disjoints et leur union vaut $[\![1, n]\!]$. On en déduit que :

$$n = \mathrm{Card}([\![1, n]\!]) = \mathrm{Card}([\![1, n]\!] \cap Sp(a)) + \mathrm{Card}([\![1, n]\!] \cap Sp(b)) = u_n(a) + u_n(b)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n = u_n(a) + u_n(b)$$

iv. On divise par $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 = \frac{u_n(a)}{n} + \frac{u_n(b)}{n}$$

D'après la question b), ces deux suites convergent donc en passant à la limite :

$$\boxed{1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

(d) i. On suppose par l'absurde que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ (puisque $a > 1$ et $b > 1$). Ainsi $qa = pb$ et donc $\lfloor qa \rfloor = \lfloor pb \rfloor$. On en déduit que $\lfloor qa \rfloor \in Sp(a) \cap Sp(b)$. C'est absurde car $Sp(a)$ et $Sp(b)$ sont disjoints.

On en déduit que $\dfrac{a}{b}$ est irrationnel.

ii. On a :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = a - 1$$

D'après la question précédente, cela implique que $a - 1$ est irrationnel et donc a irrationnel.

Enfin, si par l'absurde b est rationnel alors $\dfrac{1}{a} = 1 - \dfrac{1}{b}$ donc $\dfrac{1}{a}$ est rationnel et par suite a est rationnel, ce qui n'est pas le cas.

$$\boxed{a \text{ et } b \text{ sont irrationnels}}$$

3. (a) Supposons par l'absurde que $k \in Sp(a) \cap Sp(b)$.

i. Par définition du spectre de a, si $k \in Sp(a)$ alors il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $k = \lfloor ma \rfloor$. De même, comme $k \in Sp(b)$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $k = \lfloor nb \rfloor$.

ii. D'après la question précédente et l'encadrement usuel sur la partie entière, nous avons :

$$ma - 1 < k \leq ma \text{ et } nb - 1 < k \leq nb$$

Il reste à justifier que les deux inégalités larges sont en réalité des inégalités strictes. Par l'absurde, si $k = ma$ alors $a = \dfrac{k}{m} \in \mathbb{Q}$. On sait que a est irrationnel donc c'est contradictoire. De même, $k = nb$ est impossible également. Finalement, les inégalités sont strictes et l'on a bien :

$$ma - 1 < k < ma \text{ et } nb - 1 < k < nb$$

iii. On divise par $a > 0$ et $b > 0$ les inégalités précédentes pour obtenir :

$$m - \frac{1}{a} < \frac{k}{a} < m \text{ et } n - \frac{1}{b} < \frac{k}{b} < n$$

Puis l'on somme ces deux inégalités en utilisant la relation $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$:

$$m + n - 1 < k < m + n$$

Cette inégalité est contradictoire puisque m, n et k sont des entiers. On en déduit que :

$$\boxed{Sp(a) \cap Sp(b) = \emptyset}$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $i = \left\lfloor \dfrac{k}{a} \right\rfloor$ et $j = \left\lfloor \dfrac{k}{b} \right\rfloor$.

i. On suppose que $k \notin Sp(a)$. Par définition de i, nous avons :

$$i \leq \frac{k}{a} \leq i+1$$

ce qui donne :

$$ia \leq k < ia + a$$

Affinons cette inégalité pour obtenir celle de l'énoncé :

• Si $k = ia$ alors $a = \dfrac{k}{i} \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde car a est irrationnel (i étant bien non nul car k non nul). Ainsi $ia < k$.

• D'autre part, on va démontrer que $k < ia + a - 1$ sachant que $k < ia + a$. Pour cela raisonnons par l'absurde en supposant que $ia + a - 1 \leq k < ia + a$ alors $k < ia + a \leq k + 1$. Mais $ia + a = (i+1)a$ n'est pas un entier car a est irrationnel donc on en déduit que $\lfloor ia + a \rfloor = k$. Il en découle que $k \in Sp(a)$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de la question.
Finalement, si $k \notin Sp(a)$ alors $ia < k < ia + a - 1$.

ii. Si $k \notin Sp(a)$ et $k \notin Sp(b)$ alors en appliquant la question précédente, il vient :

$$ia < k < ia + a - 1 \text{ et } jb < k < jb + b - 1$$

On divise la première inégalité par a et la deuxième par b et l'on somme en utilisant $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$ pour obtenir :

$$i + j < k < i + j + 1$$

iii. L'inégalité ci-dessus est contradictoire car i, j et k sont des entiers. On en déduit qu'il est impossible de trouver un entier k qui n'est pas dans $Sp(a) \cup Sp(b)$. D'où :

$$\boxed{Sp(a) \cup Sp(b) = \mathbb{N}^*}$$

Or d'après la question 3., on a $Sp(a) \cap Sp(b) \neq \emptyset$ et puisque $Sp(a)$ et $Sp(b)$ ne sont pas vides, toutes les conditions sont finalement réunies pour en déduire que :

$$\boxed{Sp(a) \text{ et } Sp(b) \text{ forment une partition de } \mathbb{N}^*}$$

Ce qui termine totalement la preuve et démontre le théorème de Beatty.

4. (a) L'équation caractéristique est $X^2 - X - 1 = 0$ qui a pour solutions φ et, puisque le produit des solutions vaut -1, l'autre solution est $-\dfrac{1}{\varphi}$. D'après le cours, on sait que :

$$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N},\ F_n = A \times \varphi^n + B \times \left(-\frac{1}{\varphi} \right)^n$$

On trouve A et B avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A\varphi - B\dfrac{1}{\varphi} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -A \\ A\left(\varphi - \dfrac{1}{\varphi}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ B = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}\right)}$$

(b) Par résolution de l'équation, on trouve $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et on calcule $\varphi^2 = \varphi + 1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. Ces deux nombres sont bien irrationnels car si, par l'absurde, $\varphi = r \in \mathbb{Q}$ alors $\sqrt{5} = 1 - 2r \in \mathbb{Q}$ ce qui est contradictoire d'après l'énoncé. On procède de même pour φ^2. Pour appliquer le théorème de Beatty, il reste à vérifier que :

$$\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2} = \frac{\varphi+1}{\varphi^2} = 1$$

On en déduit que :

$$\boxed{Sp(\varphi) \text{ et } Sp(\varphi^2) \text{ forment une partition de } \mathbb{N}^*}$$

(c) Si $Sp(a)$ et $Sp(a^2)$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$ toujours en utilisant le théorème de Beatty, on a $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2} = 1$. Cette équation est équivalente à $a^2 + a + 1 = 0$, ainsi $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ en excluant l'autre solution $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ qui est négative.

$$\boxed{\text{Si } Sp(a) \text{ et } Sp(a^2) \text{ forment une partition de } \mathbb{N}^* \text{ alors } a = \varphi}$$

D-Jeu de Wythoff

1. (a) D'après la question 4.(a) de la partie C, on a $\varphi^2 = \varphi + 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$v_n = \lfloor \varphi^2 n \rfloor = \lfloor (\varphi+1)n \rfloor = \lfloor \varphi n + n \rfloor = \lfloor \varphi n \rfloor + n = u_n + n$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n - u_n = n}$$

(b) Notons (x, y) l'état du jeu à un instant donné. Lorsque l'un des joueurs prélève des jetons, nous obtenons un nouvel état (x', y'). Cependant $x' + y' < x + y$ puisqu'au moins un jeton a été pris dans au moins une pile. La suite des sommes des nombres de jetons des deux piles est une suite d'entiers naturels strictement décroissante. Cependant, il n'existe pas de suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante : le jeu comporte un nombre fini d'étapes.

(c) Si l'état est $(3, 4)$ et que l'on prélève 2 jetons dans chaque pile, nous passons à l'état $(1, 2)$. Notre adversaire doit alors jouer, les états possibles qu'il peut atteindre sont : $(0, 2)$, $(1, 1)$ et $(0, 1)$. Ces trois états constituent des situations dans lesquelles nous pouvons gagner directement.

2. On suppose que l'état (x, y) est configuré, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = u_n$ et $y = v_n$. Examinons les différents coups possibles :

• soit on prélève un même nombre de jetons aux deux piles, le nouvel état est noté (x', y') avec $x' < x$ et $y' < y$. Par l'absurde, si ce nouvel état est également configuré alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x' = u_p$ et $y' = v_p$. Puisque l'on a retiré le même nombre de jetons aux deux piles et en utilisant le résultat de la question 1.(a), on a :

$$p = v_p - u_p = y' - x' = y - x = n$$

Dans ce cas $x = u_n = u_p = x'$, ce qui est absurde.

• soit on enlève des jetons à la plus petite pile, le nouvel état est noté (x', y') avec $x' < x$ et $y' = y$. Si l'état est encore configuré alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x' = u_p$ et $y' = v_p$. On a $y = y'$ donc $v_n = v_p$ d'où $n = p$. En effet, d'après la question 3.(a) de la partie B, comme $\varphi^2 > 1$, la fonction f_{φ^2} est injective. Dans ce cas $x' = u_p = u_n = x$, ce qui est absurde.

• le raisonnement est identique si l'on enlève des jetons à la plus grande pile.

$$\boxed{\text{Si un état est configuré alors l'état suivant ne l'est pas}}$$

3. On suppose que l'état (x, y) n'est pas configuré. Si $x = 0$ ou $y = 0$ ou $x = y$, on se ramène à l'état configuré $(0, 0)$ en un seul coup. On suppose dans la suite que $1 \leq x < y$ et on note $n = y - x \in \mathbb{N}^*$. Nous allons considérer deux cas :

   • si $x > u_n$ alors la stratégie consiste à retirer $x - u_n$ jetons dans chaque pile. Le nouvel état (x', y') est défini par $x' = x - (x - u_n) = u_n$ et $y' = y - (x - u_n) = n + u_n = v_n$. Ainsi l'état obtenu (x', y') est bien configuré.

   • on suppose à présent que $x < u_n$. Les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ formant une partition de $\mathbb{N}^*$, on sait que x est égal à l'un des termes de l'une de ces suites :

   ▶ s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = u_p$ alors $p < n$ car $u_p < u_n$. On choisit d'enlever $\alpha = y - v_p$ jetons à la pile en contenant y ainsi il y en aura $y' = y - \alpha = v_p$ et $x' = x = u_p$. Ce qui fait que l'état (x', y') est bien configuré mais il faut vérifier tout de même que $\alpha > 0$:

   $$\alpha = y - v_p = x + n - v_p = n - p > 0$$

   ▶ s'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = v_q$, on cherche α tel que $y' = y - \alpha = u_q$, on trouve $\alpha = y - u_q > 0$ car $u_q < v_q = x < y$. On prélève α jetons dans la pile de y et on garde $x' = x$. Le nouvel état (x', y') est alors également configuré.

   $$\boxed{\text{Si un état n'est pas configuré alors il est possible de jouer afin que l'état suivant le soit}}$$

4. Si l'état initial est configuré alors on laisse jouer notre adversaire en premier. D'après la question 2., notre adversaire nous laissera un état non configuré et en jouant nous pouvons obtenir un état configuré d'après la question 3. On répète ce procédé. Or le jeu se termine forcément et par un état configuré $(0, 0)$ ainsi nous sommes certain de gagner car nos états peuvent toujours être configurés et ceux de notre adversaire ne le seront jamais.

   Si l'état initial n'est pas configuré, on commence à jouer afin que l'état suivant soit configuré. C'est alors à notre adversaire de jouer et l'on est ramené au premier cas.

   Vous pouvez jouer à ce jeu en suivant ce lien : http ://jm.davalan.org/jeux/nim/wythoff/index.html.