Problème

A-Étude du cas $k = 1$

1. (a) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant la relation ($\bigstar$). D'une part, on peut utiliser la relation en $\frac{1}{x}$ pour obtenir :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$$

D'autre part, la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ car pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. On dérive :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} f(x)$$

Ainsi la fonction f vérifie l'équation différentielle :

$$\boxed{\forall x > 0,\ f''(x) + \frac{1}{x^2} f(x) = 0}$$

(b) On reconnait une équation différentielle linéaire d'ordre 2 mais les coefficients ne sont pas constants. On pose : $g : t \mapsto f(e^t)$ définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f étant deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que g est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$. De façon équivalente, on a : $f : x \mapsto g(\ln(x))$ et en dérivant :

$$f' : x \mapsto \frac{1}{x} g'(\ln(x))$$

$$f'' : x \mapsto -\frac{1}{x^2} g'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2} g''(\ln(x))$$

On a :

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) + \frac{1}{x^2} f(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ -\frac{1}{x^2} g'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2} g''(\ln(x)) + \frac{1}{x^2} g(\ln(x)) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ -g'(\ln(x)) + g''(\ln(x)) + g(\ln(x)) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ g''(t) - g'(t) + g(t) = 0
\end{aligned}$$

On sait résoudre cette dernière équation portant sur g. L'équation caractéristique s'écrit $0 = X^2 - X + 1$, elle a pour solutions : $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = e^{\frac{1}{2}t}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

On trouve ainsi la fonction f :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = e^{\frac{1}{2}\ln(x)}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right) \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

En simplifiant :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \sqrt{x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right) \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2}$$

2. Réciproquement, il s'agit de vérifier si les fonctions trouvées sont bien solutions de l'équation (★). Les fonctions f définies sur $\mathbb{R}_+^*$ avec l'expression ci-dessus sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big(A\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big)+B\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big)\Big)+\sqrt{x}\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{A}{x}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big)+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{B}{x}\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big)\Big)$$

En simplifiant :

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big(A\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big)+B\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big)\Big)+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big(-A\sqrt{3}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big)+\sqrt{3}B\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big)\Big)$$

C'est-à-dire :

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big((A+B\sqrt{3})\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big)+(B-A\sqrt{3})\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big)\Big)$$

D'autre part pour $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f\Big(\frac{1}{x}\Big)=\sqrt{\frac{1}{x}}\Big(A\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big)+B\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big)\Big)=\frac{1}{\sqrt{x}}\Big(A\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big)-B\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big)\Big)$$

En examinant les deux expressions, on en déduit que :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f'(x)=f\Big(\frac{1}{x}\Big)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{A+B\sqrt{3}}{2}=A\\ \dfrac{B-A\sqrt{3}}{2}=-B\end{cases}\Leftrightarrow A=B\sqrt{3}$$

Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation sont les fonctions :

$$\boxed{x\mapsto\sqrt{x}\Big(B\sqrt{3}\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big)+B\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big)\Big)\text{ avec }B\in\mathbb{R}}$$

Remarque. Lors de ce calcul, nous avons fait l'identification suivante pour $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$:

$$a\cos(x)+b\sin(x)=c\cos(x)+d\sin(x)\Rightarrow a=c\text{ et }b=d$$

C'est valable car en évaluant en $x=2\pi$, on trouve $a=c$ puis en évaluant en $\frac{\pi}{2}$, on trouve $b=d$.

B-Un exemple

1. (a) • Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, la fonction f_λ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et :

$$\forall x>0,\ f_\lambda'(x)=\frac{1}{x}\sqrt{x}+(\lambda+\ln(x))\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2+\lambda+\ln(x)}{2\sqrt{x}}$$

• On étudie le signe de cette dérivée en remarquant que :

$$f_\lambda'(x)\geq 0\Leftrightarrow 2+\lambda+\ln(x)\geq 0\Leftrightarrow \ln(x)\geq -2-\lambda\Leftrightarrow x\geq e^{-2-\lambda}$$

• Il est clair que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f_\lambda(x)=+\infty$. D'autre part, d'après les résultats de croissances comparées usuelles $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\ln(x)=\lim\limits_{x\to 0}2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})=0$, on déduit que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to 0}f_\lambda(x)=0$.

• Avec ces informations, on en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		$e^{-2-\lambda}$		$+\infty$
$f'_\lambda(x)$		$-$	0	$+$	
f_λ	0	$\searrow$	$\dfrac{-2}{e^{1+\frac{\lambda}{2}}}$	$\nearrow$	$+\infty$

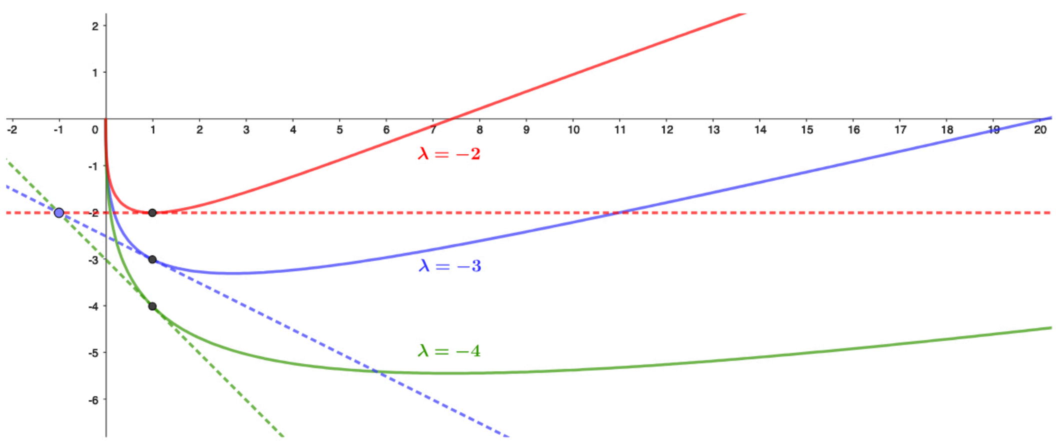
(b) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, une équation cartésienne de T_λ est :

$$y = f'_\lambda(1)(x-1) + f_\lambda(1) = \frac{2+\lambda}{2}(x-1) + \lambda = \left(\frac{\lambda}{2} + 1\right)(x+1) - 2$$

On remarque que pour $x = -1$ alors $y = -2$ quelque soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Les droites } T_\lambda \text{ sont concourantes en } (-1, -2)}$$

(c) Avec les informations précédentes, nous obtenons les graphiques suivants :



2. (a) Nous reconnaissons une équation différentielle linéaire d'ordre 1 classique. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$y_0 : x \mapsto \alpha e^{\frac{1}{2}\ln(x)} = \alpha\sqrt{x} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}$$

On utilise la méthode de la variation de la constante afin de trouver une solution particulière. On considère $y_0 : x \mapsto \alpha(x)\sqrt{x}$ où α est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$. La fonction y_0 est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $y'_0 : x \mapsto \alpha'(x)\sqrt{x} + \alpha(x)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. On a :

$$\begin{aligned}
y_0 \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x > 0,\ y'_0(x) - \frac{1}{2x}y_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x > 0,\ \alpha'(x)\sqrt{x} + \alpha(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x}\alpha(x)\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x > 0,\ \alpha'(x) = \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

On choisit $\alpha : x \mapsto \ln(x)$, c'est-à-dire $y_0 : x \mapsto \sqrt{x}\ln(x)$. Finalement, les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions :

$$\boxed{x \mapsto (\alpha + \ln(x))\sqrt{x} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}}$$

(b) La condition initiale $y(1) = \lambda$ nous donne $\alpha = \lambda$.

$$\boxed{\text{L'unique solution de } (\mathcal{P}) \text{ sur }]0,+\infty[\text{ est } f_\lambda}$$

3. Pour $x > 0$, on a :

$$f_\lambda'(x) = \frac{2+\lambda+\ln(x)}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}\Big(-2-\lambda+\ln\left(\frac{1}{x}\right)\Big)\sqrt{\frac{1}{x}}$$

Ainsi, la fonction f_λ vérifie ($\bigstar$) si et seulement si $-2-\lambda = \lambda$, c'est-à-dire $\lambda = -1$. Dans ce cas, d'après le calcul précédent :

$$\forall x > 0,\ f_\lambda'(x) = -\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{f_{-1} \text{ vérifie } (\bigstar) \text{ pour } k = -\frac{1}{2}}$$

C-Cas où $k = -\dfrac{1}{2}$

1. (a) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc g l'est aussi comme somme et composée de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{f'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\frac{f(x)}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\sqrt{x}}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\frac{f(x)}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{x\sqrt{x}}f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ceci en utilisant que f vérifie ($\bigstar$), c'est-à-dire que pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ et } f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}f(x)$$

Sa dérivée étant nulle sur l'intervalle $]0,+\infty[$, on en déduit que :

$$\boxed{g \text{ est constante}}$$

(b) La fonction g est constante et $g(1) = 2f(1)$ donc pour tout $x > 0$, $g(x) = 2f(1)$. Cela se réécrit :

$$\forall x > 0,\ \frac{f(x)}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}f\left(\frac{1}{x}\right) = 2f(1) \Leftrightarrow \forall x > 0,\ \frac{f(x)}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}f'(x) = 2f(1)$$

Finalement, en réorganisant cette égalité :

$$\boxed{\forall x > 0,\ f'(x) - \frac{1}{2x}f(x) = \frac{-f(1)}{\sqrt{x}}}$$

2. Si $f(1)=0$, d'après la question précédente, la fonction f vérifie l'équation différentielle $y'-\dfrac{1}{2x}y=0$ avec la condition initiale $y(1)=0$. Seule la fonction nulle vérifie ce problème de Cauchy, par unicité de la solution.

$$\boxed{f \text{ est nulle}}$$

3. On suppose que $f(1)\neq 0$. On note $h : x\mapsto -\dfrac{f(x)}{f(1)}$. On a h solution de $y'-\dfrac{1}{2x}y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $h(1)=-1$. D'après la partie B, l'unique solution de ce problème de Cauchy est $f_{-1} : x\mapsto (-1+\ln(x))\sqrt{x}$. On en déduit que $h=f_{-1}$, c'est-à-dire $f=cf_{-1}$ où c est une constante.

   Réciproquement, comme f_{-1} est solution de $(\bigstar)$ pour $k=-\dfrac{1}{2}$, la fonction cf_{-1} l'est également pour tout $c\in\mathbb{R}$. Finalement, grâce à cette analyse-synthèse, les solutions sur $]0,+\infty[$ de $(\bigstar)$ sont les fonctions :

$$\boxed{x\mapsto c(-1+\ln(x))\sqrt{x} \text{ avec } c\in\mathbb{R}}$$

D-Résolution dans le cas où $k\in\left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$

1. Pour $\alpha>\dfrac{1}{2}$. La fonction $y : x\mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $y'' : x\mapsto \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E_k) &\Leftrightarrow \forall x>0,\ x^2y''(x)+k^2y(x)=0\\ &\Leftrightarrow \forall x>0,\ \alpha(\alpha-1)x^2x^{\alpha-2}+k^2x^\alpha=0\\ &\Leftrightarrow \alpha(\alpha-1)+k^2=0\\ &\Leftrightarrow \alpha^2-\alpha+k^2=0\end{aligned}$$

   Le discriminant de cette équation de degré 2 vaut $\Delta=1-4k^2>0$ puisque $k\in\left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$. On a deux solutions :

$$\alpha_1=\frac{1+\sqrt{1-4k^2}}{2} \text{ et } \alpha_2=\frac{1-\sqrt{1-4k^2}}{2}$$

   Or le réel α que l'on cherche est supérieur à $\dfrac{1}{2}$. Ainsi :

$$\boxed{\alpha=\frac{1+\sqrt{1-4k^2}}{2}}$$

2. (a) La fonction y est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ donc z est dérivable également deux fois sur $]0,+\infty[$. D'autre part, $y : x\mapsto x^\alpha z(x)$.

$$y' : x\mapsto \alpha x^{\alpha-1}z(x)+x^\alpha z'(x) \text{ et } y'' : x\mapsto \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}z(x)+2\alpha x^{\alpha-1}z'(x)+x^\alpha z''(x)$$

   On injecte dans l'équation (E_k) :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E_k) &\Leftrightarrow \forall x>0,\ x^2y''(x)+k^2y(x)=0\\ &\Leftrightarrow \forall x>0,\ \alpha(\alpha-1)x^\alpha z(x)+2\alpha x^{\alpha+1}z'(x)+x^{\alpha+2}z''(x)+k^2x^\alpha z(x)=0\\ &\Leftrightarrow \forall x>0,\ \underbrace{(\alpha(\alpha-1)+k^2)}_{=0}z(x)+2\alpha xz'(x)+x^2z''(x)=0\\ &\Leftrightarrow \forall x>0,\ z''(x)+\frac{2\alpha}{x}z'(x)=0\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{z' \text{ est solution de } (E_k') : y' + \frac{2\alpha}{x} y = 0}$$

(b) On résout sans problème l'équation (E_k') qui est déjà homogène :

$$\boxed{z' : x \mapsto c e^{-2\alpha \ln(x)} = c x^{-2\alpha}}$$

(c) En intégrant l'expression précédente, nous obtenons :

$$\exists (a, c) \in \mathbb{R}^2,\ z : x \mapsto \frac{c}{1-2\alpha} x^{1-2\alpha} + a$$

ceci sachant que $\alpha \neq \frac{1}{2}$. En notant $b = \frac{c}{1-2\alpha}$, on en déduit que :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ z : x \mapsto b x^{1-2\alpha} + a$$

On retrouve y en multipliant par x^α :

$$\boxed{\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ y : x \mapsto a x^\alpha + b x^{1-\alpha}}$$

3. On procède par analyse-synthèse :

• **Analyse.** Soit f une solution de $(\bigstar)$ avec $k \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$. Avec le même raisonnement que dans la question 1.(a) de la partie A, on a f qui est dérivable deux fois sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall x > 0,\ f''(x) = -\frac{k}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{k^2}{x^2} f(x)$$

On en déduit que f est solution de (E_k) donc d'après la question précédente :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ f : x \mapsto a x^\alpha + b x^{1-\alpha}$$

toujours avec $\alpha > \frac{1}{2}$ et $\alpha^2 - \alpha + k^2$.

• **Synthèse.** Soit f une fonction ainsi définie, on a :

$$\begin{aligned}
f \text{ vérifie } (\bigstar) \quad & \Leftrightarrow \quad \forall x > 0,\ a\alpha x^{\alpha-1} + b(1-\alpha) x^{-\alpha} = k\left(a\frac{1}{x^\alpha} + b\frac{1}{x^{1-\alpha}}\right) = k a x^{-\alpha} + k b x^{\alpha-1} \\
& \Leftrightarrow \quad a\alpha = kb \text{ et } b(1-\alpha) = ka \\
& \Leftrightarrow \quad a = \frac{kb}{\alpha} \text{ car } k^2 + \alpha(\alpha - 1) = 0
\end{aligned}$$

Finalement, pour $k \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$, les fonctions solutions de $(\bigstar)$ sont les fonctions :

$$\boxed{x \mapsto c(k x^\alpha + \alpha x^{1-\alpha}) \ \text{ avec} c \in \mathbb{R}}$$

toujours avec $\alpha = \frac{1 + \sqrt{1 - 4k^2}}{2}$.