

Problème 1 (Intégration)

Le but de l'exercice est d'étudier une méthode pour trouver une primitive des fonctions rationnelles du type :

$$x \mapsto \frac{\alpha x + \beta}{(ax^2 + bx + c)^n} \text{ où } (\alpha, \beta, a, b, c) \in \mathbb{R}^5 \text{ avec } a \neq 0 \text{ et } n \in \mathbb{N}^*$$

On va se restreindre au cas où le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$ est strictement négatif.

1. Deux exemples.

(a) Donner une primitive de la fonction $f_1 : x \mapsto \frac{18x + 15}{(3x^2 + 5x + 3)^3}$.

(b) Donner une primitive de la fonction $f_2 : x \mapsto \frac{3x + 2}{2x^2 - 4x + 3}$.

2. On va à présent étudier le cas général, on se donne $(\alpha, \beta, a, b, c) \in \mathbb{R}^5$ avec $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ et :

$$f : x \mapsto \frac{\alpha x + \beta}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

(a) Déterminer les coefficients réels A et B que l'on exprimera en fonction de α , β , a , b et c tels que :

$$f(x) = A \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^n} + B \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Donner une primitive de $g : x \mapsto A \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^n}$. Il reste ainsi à intégrer $h : x \mapsto B \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^n}$.

(b) Montrer que trouver une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^n}$ revient à déterminer une primitive de

$t \mapsto \frac{1}{(t^2 + 1)^n}$. On pourra mettre le trinôme au dénominateur sous forme canonique puis effectuer un changement de variable approprié. On ne cherchera pas à expliciter la constante qui permet de passer d'une primitive à l'autre.

(c) Pour u réel, on définit la fonction $I_n : u \mapsto \int_0^u \frac{dt}{(t^2 + 1)^n}$. I_n est la primitive de $t \mapsto \frac{1}{(t^2 + 1)^n}$ qui s'annule en $u = 0$.

i. Expliciter la fonction I_1 .

ii. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$I_n(u) = \frac{3 - 2n}{2(1 - n)} I_{n-1}(u) - \frac{1}{2(1 - n)} \frac{u}{(u^2 + 1)^{n-1}}$$

(d) Expliquer alors comment déterminer la fonction I_n , on ne cherchera pas à donner une formule explicite.

3. Appliquer la méthode présentée dans cet exercice pour déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Corrigé :

1. (a) Le discriminant du trinôme $3x^2 + 5x + 3$ vaut -11 , ainsi f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ puisque son dénominateur est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_1(x) = 3 \frac{6x + 5}{(3x^2 + 5x + 3)^3}$$

On reconnaît la forme $\frac{u'}{u^3}$ avec $u(x) = 3x^2 + 5x + 3$, cela s'intègre en $-\frac{1}{2} \frac{1}{u^2}$. Une primitive de f_1 sur $\mathbb{R}$ est :

$$F_1 : x \mapsto -\frac{3}{2} \frac{1}{(3x^2 + 5x + 3)^2}$$

- (b) Le discriminant du trinôme $2x^2 - 4x + 3$ vaut -8 , ainsi f_2 est définie sur $\mathbb{R}$ puisque son dénominateur est strictement positif sur $\mathbb{R}$. On applique la méthode vue en cours en transformant l'écriture, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_2(x) = \frac{3}{4} \frac{4x + \frac{8}{3}}{2x^2 - 4x + 3} = \frac{3}{4} \left(\underbrace{\frac{4x - 4}{2x^2 - 4x + 3}}_{(1)} + \underbrace{\frac{4 + \frac{8}{3}}{2x^2 - 4x + 3}}_{(2)} \right)$$

La partie (1) est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 2x^2 - 4x + 3$, une primitive est $x \mapsto \ln(2x^2 - 4x + 3)$.

Pour intégrer (2), on continue à transformer l'écriture en mettant le dénominateur sous forme canonique :

$$\frac{20}{3} \frac{1}{2x^2 - 4x + 3} = \frac{10}{3} \frac{1}{x^2 - 2x + \frac{3}{2}} = \frac{10}{3} \frac{1}{(x - 1)^2 - 1 + \frac{3}{2}} = \frac{10}{3} \frac{1}{(x - 1)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}$$

En appliquant le lemme du cours, une primitive de (2) est alors $x \mapsto \frac{10}{3} \sqrt{2} \operatorname{Arctan}((x - 1)\sqrt{2})$.

Une primitive de f_2 sur $\mathbb{R}$ est :

$$F_2 : x \mapsto \frac{3}{4} \left(\ln(2x^2 - 4x + 3) + \frac{10}{3} \sqrt{2} \operatorname{Arctan}((x - 1)\sqrt{2}) \right)$$

2. Remarquons déjà que comme le discriminant du dénominateur est strictement négatif, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

- (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on transforme l'écriture de la façon suivante :

$$f(x) = \frac{\frac{\alpha}{2a} (2ax + b) + \beta - \frac{\alpha}{2a} b}{(ax^2 + bx + c)^n} = \frac{\alpha}{2a} \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^n} + \left(\beta - \frac{\alpha}{2a} b \right) \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

On peut choisir :

$$A = \frac{\alpha}{2a} \text{ et } B = \beta - \frac{\alpha}{2a} b$$

La fonction g est de la forme $\frac{u'}{u^n}$ où $u(x) = ax^2 + bx + c$. Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est :

$$\begin{cases} G : x \mapsto A \ln(ax^2 + bx + c) & \text{si } n = 1 \\ G : x \mapsto -\frac{A}{n-1} \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Il reste à intégrer la seconde partie de l'expression, c'est-à-dire $h : x \mapsto B \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^n}$.

(b) On suit l'indication de l'énoncé et on met le trinôme sous forme canonique, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right) = a \frac{-\Delta}{4a^2} \left(\left(\frac{x + \frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2|a|}} \right)^2 + 1 \right)$$

On pose $t = \frac{x + \frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2|a|}}$, ce changement de variable est affine, il est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a $dt = \frac{2|a|}{\sqrt{-\Delta}} dx$.

Ainsi en effectuant ce changement de variable, on a :

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} = K \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^n}$$

où K est une constante réelle qu'il n'est pas utile ici d'expliciter.

(c) i. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a :

$$I_1(u) = \int_0^u \frac{dt}{t^2 + 1} = [\text{Arctan}(t)]_0^u = \text{Arctan}(u)$$

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}, I_n(u) = \text{Arctan}(u)}$$

ii. Soit $n \geq 2$, pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a :

$$I_n(u) = \int_0^u \frac{dt}{(t^2 + 1)^n} = \int_0^u \frac{1 + t^2 - t^2}{(t^2 + 1)^n} dt = \underbrace{\int_0^u \frac{1}{(t^2 + 1)^{n-1}} dt}_{=I_{n-1}(u)} - \underbrace{\int_0^u \frac{t^2}{(t^2 + 1)^n} dt}_{(1)} \quad (\star)$$

Il reste à calculer (1), pour cela on transforme l'écriture afin de pouvoir effectuer une intégration par parties :

$$(1) = \int_0^u \frac{2t}{(t^2 + 1)^n} \times \frac{t}{2} dt$$

On pose :

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{t}{2} & r'(t) &= \frac{1}{2} \\ s'(t) &= \frac{2t}{(t^2 + 1)^n} & s(t) &= \frac{1}{1-n} \frac{1}{(t^2 + 1)^{n-1}} \end{aligned}$$

Les fonctions r et s sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} (1) &= \int_0^u \frac{2t}{(t^2 + 1)^n} \times \frac{t}{2} dt \\ &= \left[\frac{1}{2(1-n)} \frac{t}{(t^2 + 1)^{n-1}} \right]_0^u - \int_0^u \frac{1}{2(1-n)} \frac{1}{(t^2 + 1)^{n-1}} dt \\ &= \frac{1}{2(1-n)} \frac{u}{(u^2 + 1)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} I_{n-1}(u) \end{aligned}$$

Pour finir le calcul, on reprend l'expression $(\star)$, pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a :

$$I_n(u) = I_{n-1}(u) - \frac{1}{2(1-n)} \frac{u}{(u^2 + 1)^{n-1}} + \frac{1}{2(1-n)} I_{n-1}(u) = \frac{3-2n}{2(1-n)} I_{n-1}(u) - \frac{1}{2(1-n)} \frac{u}{(u^2 + 1)^{n-1}}$$

$$\forall u \in \mathbb{R}, I_n(u) = \frac{3-2n}{2(1-n)} I_{n-1}(u) - \frac{1}{2(1-n)} \frac{u}{(u^2+1)^{n-1}}$$

- (d) La formule précédente permet de calculer I_2 à partir de I_1 , que l'on connaît. On calcule ainsi de proche en proche les fonctions I_n .
3. Le discriminant du dénominateur vaut -3 , ainsi la fonction est définie sur $\mathbb{R}$. On applique la méthode proposée dans la question 2.(a) pour transformer l'écriture, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{x+1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2x+1+1}{(x^2+x+1)^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{1}{(x^2+x+1)^2} \right) \quad (\clubsuit)$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ est de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x^2+x+1$. Une primitive de cette fonction est $x \mapsto -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+x+1}$. Il reste à déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{(x^2+x+1)^2}$. Pour cela on suit la méthode la question 2.(b) en mettant le trinôme sous forme canonique, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{\left((x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\right)^2} = \frac{16}{9} \frac{1}{\left(\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1\right)^2}$$

On pose $t = \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ qui est un changement de variable affine donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a $dt = \frac{2}{\sqrt{3}} dx$.

Ainsi :

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \int \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{16}{9} \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \int \frac{8}{3\sqrt{3}} \frac{dt}{(t^2+1)^2} \quad (\heartsuit)$$

On oublie provisoirement le coefficient $\frac{8}{3\sqrt{3}}$ dont on tiendra compte à la fin du calcul et l'on cherche une primitive de $t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)^2}$, on utilise la méthode proposée dans la question 2.(c)ii. On a :

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} &= \int \frac{1+t^2-t^2}{(t^2+1)^2} dt \\ &= \int \frac{dt}{t^2+1} - \frac{1}{2} \int t \frac{2t}{(t^2+1)^2} dt \\ &= \text{Arctan}(t) - \frac{1}{2} \left(-\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{dt}{1+t^2} \right) \quad \text{avec une intégration par parties comme dans 2.(c)ii} \\ &= \frac{1}{2} \text{Arctan}(t) + \frac{1}{2} \frac{t}{t^2+1} \end{aligned}$$

On reprend le calcul $(\heartsuit)$:

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{8}{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} \text{Arctan}(t) + \frac{1}{2} \frac{t}{t^2+1} \right)$$

Or $t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ ainsi :

$$\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \right) = \frac{4}{3\sqrt{3}} \left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{3}{4\sqrt{3}} \frac{2x+1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right)$$

On prend l'expression (♣) puisqu'à présent, on connaît une primitive de chaque terme :

$$\int \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2} dx = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3\sqrt{3}} \left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{3}{4\sqrt{3}} \frac{2x+1}{x^2+x+1} \right) \right)$$

On simplifie l'expression et on trouve qu'une primitive de $x \mapsto \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$F : x \mapsto \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{3} \frac{x-1}{x^2+x+1}$$