1-Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\cos(u)+\sin(u)} du$ en posant $t = \frac{\pi}{2} - u$.

2-Que vaut $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\sin(t)dt$?

3-Calculer une primitive de $f : t \mapsto \frac{1}{2+\sin^2(t)}$.

4-Déterminer une primitive sur $[-1, 1]$ de $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$.

1-Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\cos(u)+\sin(u)}du$.

Réponse : • On pose $t = \dfrac{\pi}{2} - u$ ce qui équivaut à $u = \dfrac{\pi}{2} - t$. Ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

• On a $dt = -du$ ce qui équivaut à $du = -dt$.

• Si $u = 0$ alors $t = \dfrac{\pi}{2}$ et si $u = \dfrac{\pi}{2}$ alors $t = 0$. On obtient :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\cos(u)+\sin(u)}du = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}(-dt)$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sin(t) + \cos(t)} dt$$

Utilisons les deux expressions obtenues pour I :

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\cos(u) + \sin(u)} du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{\sin(u) + \cos(u)} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 du = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \frac{\pi}{4}$$

2-Que vaut $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\sin(t)dt$?

Réponse : La fonction $t \mapsto \cos(t)\sin(t)$ est une fonction impaire sur $[-\pi, \pi]$. Son intégrale sur cet intervalle est nulle.

3-Calculer une primitive de $f : t \mapsto \dfrac{1}{2+\sin^2(t)}$.

Réponse : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Le cas 3 de la règle de Bioche s'applique puisque, on a $h(t+\pi) = h(t)$ car $\sin(t+\pi) = -\sin(t)$. On pose $u = \tan(t)$, à ce stade on doit restreindre l'ensemble d'étude, travaillons par exemple sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ ou plus généralement sur $I_k = \left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$. Ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I_k. On a $du = (1+\tan^2(t))dt = \dfrac{1}{\cos^2(t)}dt$.

On va transformer l'écriture, on a :

$$\begin{aligned}
\int \frac{dt}{2+\sin^2(t)} &= \int \frac{dt}{\cos^2(t)} \times \frac{1}{\frac{2}{\cos^2(t)}+\tan^2(t)} \\
&= \int \frac{dt}{\cos^2(t)} \times \frac{1}{2(1+\tan^2(t))+\tan^2(t)} \\
&= \int \frac{du}{2+3u^2} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\frac{2}{3}+u^2}
\end{aligned}$$

Une primitive est $u \mapsto \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}u\right)$. Une primitive de f sur I_k est :

$$F : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\tan(t)\right)$$

4-Déterminer une primitive sur $[-1, 1]$ de $t \mapsto \sqrt{1 - t^2}$.

Réponse : On fait le changement de variable $t = \sin(u)$ qui correspond à

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] & \to & [-1, 1] \\ & & u & \mapsto & \sin(u) \end{array}$$

La fonction φ est bijective et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, d'ailleurs sur ces intervalles :

$$t = \sin(u) \Leftrightarrow \mathrm{Arcsin}(t) = u$$

On a : $dt = \cos(u)du$.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-t^2}dt &= \int |\cos(u)|\cos(u)du \\
&= \frac{1}{2}\int (1+\cos(2u))du \\
&= \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin(2u) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}(t) + \frac{1}{4}\sin(2\mathrm{Arcsin}(t)) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}(t) + \frac{1}{2}\sin(\mathrm{Arcsin}(t))\cos(\mathrm{Arcsin}(t)) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}(t) + \frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2} \quad \text{définie sur } [-1,1]
\end{aligned}$$