Acte I-Premiers exemples

1. (a) Il s'agit de vérifier si tout ensemble à deux éléments de l'ensemble E est inclus dans un et un seul élément de $\mathcal{E}$. Il y a $\binom{7}{2} = \dfrac{7 \times 6}{2} = 21$ parties de E à 2 éléments. La vérification peut se présenter ainsi :

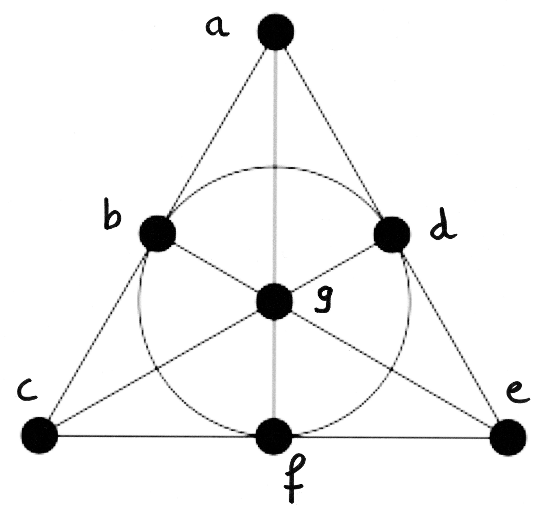
	$\{a,b,c\}$	$\{a,d,e\}$	$\{a,f,g\}$	$\{b,d,f\}$	$\{b,e,g\}$	$\{c,d,g\}$	$\{c,e,f\}$
$\{a,b\}$	✓						
$\{a,c\}$	✓						
$\{a,d\}$		✓					
$\{a,e\}$		✓					
$\{a,f\}$			✓				
$\{a,g\}$			✓				
$\{b,c\}$	✓						
$\{b,d\}$				✓			
$\{b,e\}$					$\boxed{\checkmark}$		
$\{b,f\}$				✓			
$\{b,g\}$					✓		
$\{c,d\}$						✓	
$\{c,e\}$							✓
$\{c,f\}$							✓
$\{c,g\}$						✓	
$\{d,e\}$		✓					
$\{d,f\}$				✓			
$\{d,g\}$						✓	
$\{e,f\}$							✓
$\{e,g\}$			✓				
$\{f,g\}$					✓		

La case du tableau est cochée s'il y a inclusion. Par exemple, la case encadrée du tableau correspond à l'inclusion : $\{b,e\} \subset \{b,e,g\}$.
Il est ainsi clair que chaque partie à deux éléments de E est incluse dans un unique élément de $\mathcal{E}$.

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est un système de Steiner d'ordre } 7}$$

On remarque également que chaque élément de ce système de Steiner contient exactement 3 *ensembles à* 2 *de E.*

(b) Ce dessin est une traduction géométrique de la question précédente. On remarque que chaque ensemble de deux points appartient à une et une seule droite (ou cercle pour b, d et f). Une droite correspondant bien une partie à trois éléments de E puisqu'elle contient exactement trois points. Plus précisément, l'analogie est la suivante :



Pour reprendre l'exemple encadré dans le tableau, on a les deux points b et e qui appartiennent à la droite passant par les points b, e et g, ce qui correspond à l'inclusion $\{b, e\} \subset \{b, e, g\}$.

La configuration ci-dessus est appelée plan de Fano, c'est le plan projectif construit sur le corps fini $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2. Soit $E = \{a, b\}$ un ensemble à deux éléments. Il est clair que E ne possède aucune partie à trois éléments, on aura forcément $\mathcal{E} = \emptyset$. Ainsi l'ensemble à deux éléments $\{a, b\}$ ne sera inclus dans aucun élément de $\mathcal{E}$. Il est impossible que $\mathcal{E}$ soit un système de Steiner.

   $$\boxed{\text{Il n'existe pas de système de Steiner d'ordre 2}}$$

   Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Par l'absurde, supposons que $\mathcal{E}$ soit un système de Steiner de E. L'ensemble $\mathcal{E}$ possède au moins 2 éléments sinon l'un des éléments de E n'appartiendrait pas à l'un des éléments de $\mathcal{E}$. Cependant 2 parties de $\mathcal{E}$ ont au moins 2 éléments de E en commun, c'est contradictoire avec la définition d'un système de Steiner.

   $$\boxed{\text{Il n'existe pas de système de Steiner d'ordre 4}}$$

3. Soit $E = \{a\}$, un système de Steiner de E est $\mathcal{E} = \emptyset$. En effet, toute partie à deux éléments de E (il n'y en a pas) est incluse dans l'un des éléments de $\mathcal{E}$.

   Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble à trois éléments, on pose $\mathcal{E} = \{\{a, b, c\}\}$. Il est clair que toute partie à deux éléments de E est incluse dans un unique élément de $\mathcal{E}$.

   $$\boxed{\text{1 et 3 sont des nombres de Steiner}}$$

Acte II-Condition nécessaire sur les nombres de Steiner

1. (a) Il s'agit de dénombrer les couples $(P, A) \in \mathcal{P}_2 \times \mathcal{E}$ que l'on peut former avec la condition $P \subset A$. Il y a p choix possibles pour la partie A. De plus, la partie A étant un triplet, elle contient 3 paires. Une paire étant contenue dans un unique triplet par définition d'un système de Steiner, on a :

$$\boxed{\mathrm{Card}(X) = 3p}$$

(b) Cette application est surjective si chaque paire de E est incluse dans au moins un triplet de $\mathcal{E}$. Elle est injective si chaque paire de E est incluse dans au plus un triplet de $\mathcal{E}$. Enfin, elle est bijective si elle est injective et surjective, c'est-à-dire si chaque paire de E est incluse dans exactement un triplet de $\mathcal{E}$.

$$\boxed{\Gamma \text{ est bijective si et seulement si } \mathcal{E} \text{ est un système de Steiner de } E}$$

(c) On a supposé que $\mathcal{E}$ est un système de Steiner de E, on en déduit que Γ est une bijection. S'il y a une bijection entre deux ensembles finis alors ceux-ci sont de même cardinal. Le cardinal de $\mathcal{P}_2(E)$ vaut $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, en effet choisir une paire de E revient à choisir 2 éléments parmi n. Ainsi, on a : $3p = \frac{n(n-1)}{2}$. On en déduit la relation suivante entre p et n :

$$\boxed{p = \frac{n(n-1)}{6}}$$

2. Choisissons un élément x de E. Cet élément appartient exactement à $n-1$ paires d'éléments de E. Or chaque triplet de $\mathcal{E}$ auquel x appartient contient exactement deux paires dont l'un des éléments est x. On en déduit que x est contenu dans exactement $\frac{n-1}{2}$ triplets de $\mathcal{E}$.

$$\boxed{\text{Tout élément de } E \text{ appartient à exactement } \frac{n-1}{2} \text{ triplets de } \mathcal{E}.}$$

3. Si $\mathcal{E}$ est un système de Steiner sur l'ensemble E alors les deux questions précédentes impliquent que $\frac{n(n-1)}{6}$ et $\frac{n-1}{2}$ sont des entiers, c'est-à-dire que : $6|n(n-1)$ et $2|(n-1)$. Examinons les différents cas selon les congruences possibles modulo 6. La condition $2|(n-1)$ implique que $n-1$ est congru à 0, 2 ou 4 modulo 6, c'est-à-dire que n est congru à 1, 3 ou 5 modulo 6. On a alors :

$$\text{si } n \equiv 1\ [6] \text{ alors } n(n-1) \equiv 0\ [6]$$

$$\text{si } n \equiv 3\ [6] \text{ alors } n(n-1) \equiv 0\ [6]$$

$$\text{si } n \equiv 5\ [6] \text{ alors } n(n-1) \equiv 2\ [6]$$

On en déduit que $n \equiv 1$ [6] ou $n \equiv 3$ [6]. Nous avons bien vérifié que si un système de Steiner existe sur un ensemble à n éléments, il est nécessaire que :

$$\boxed{n \equiv 1\ [6] \text{ ou } n \equiv 3\ [6]}$$

Entracte-Utilisation de Python

Il est possible de gérer directement les ensembles en Python avec le type set mais savoir manier les listes vous sera plus utile en IPT cette année.

1. On construit l'ensemble des listes à deux éléments de E avec deux boucles for imbriquées. Le fait de prendre des indices i et j tels que $i < j$ évite de compter en double $[a, b]$ et $[b, a]$ qui correspondent à la même partie et de considérer $[a, a]$ qui correspond à un ensemble avec 1 élément.

```
def P2(E):
    """renvoie toutes les parties à deux élements de E"""
    n = len(E)
    L = []
    for i in range(n):
        for j in range(i + 1, n):
            L.append([E[i], E[j]])
    return(L)
```

   Par exemple :

```
>>> P2([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7])
[[1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 5], [1, 6], [1, 7], [2, 3], [2, 4], [2, 5], [2, 6], [2, 7], [3, 4],
[3, 5], [3, 6], [3, 7], [4, 5], [4, 6], [4, 7], [5, 6], [5, 7], [6, 7]]
```

   Vous pouvez vérifier que cette liste contient en effet $\dfrac{7 \times 6}{2} = 21$ éléments.

2. De même avec trois boucles imbriquées :

```
def P3(E):
    """renvoie toutes les parties à trois éléments de E"""
    n = len(E)
    L = []
    for i in range(n):
        for j in range(i + 1, n):
            for k in range(j + 1, n):
                L.append([E[i], E[j], E[k]])
    return(L)
```

   Par exemple :

```
>>> P3([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7])
[[1, 2, 3], [1, 2, 4], [1, 2, 5], [1, 2, 6], [1, 2, 7], [1, 3, 4], [1, 3, 5], [1, 3, 6], [1, 3,
7], [1, 4, 5], [1, 4, 6], [1, 4, 7], [1, 5, 6], [1, 5, 7], [1, 6, 7], [2, 3, 4], [2, 3, 5], [2,
3, 6], [2, 3, 7], [2, 4, 5], [2, 4, 6], [2, 4, 7], [2, 5, 6], [2, 5, 7], [2, 6, 7], [3, 4, 5], [
3, 4, 6], [3, 4, 7], [3, 5, 6], [3, 5, 7], [3, 6, 7], [4, 5, 6], [4, 5, 7], [4, 6, 7], [5, 6, 7]
]
```

3. Voici une version de la fonction demandée :

```
def inclusion(L, M):
    """teste si les deux éléments de L sont parmi les trois éléments de M"""
    if (L[0] in M) and (L[1] in M):
        return(1)
    else:
        return(0)
```

4. On parcourt la liste S et on utilise la fonction *inclusion* précédente :

```
def occurrence(L, S):
    """renvoie le nombre d'éléments de S qui contiennent les deux éléments de L"""
    somme = 0
    for M in S:
        somme = somme + inclusion(L, M)
    return(somme)
```

5. Par définition S est un système de Steiner pour E si et seulement si chaque paire de E est incluse dans un unique triplet de S. On peut ainsi utiliser la fonction *occurrence* précédente.

```python
def teststeiner(E, S):
    """teste si l'ensemble S est un système de Steiner pour l'ensemble E"""
    liste2 = P2(E)
    for L in liste2:
        if occurrence(L, S) != 1:
            return(0)
    return(1)
```

On peut faire la vérification du système de Steiner sur un ensemble à 7 élément donné dans la partie A avec la correspondance évidente entre lettres de l'alphabet et nombres entiers.

```
>>> teststeiner([1,2,3,4,5,6,7],[[1,2,3],[1,4,5],[1,6,7],[2,4,6],[2,5,7],[3,4,7],[3,5,6]])
1
```

6. La fonction suivante choisit au hasard $p = \dfrac{n(n-1)}{6}$ triplets et teste si l'ensemble de ces triplets forme un système de Steiner pour E. Si oui, elle l'affiche.

```python
def recherchesteiner(E, Nmax):
    """teste au hasard des systèmes de Steiner potentiels S"""
    n = len(E)
    p = n * (n - 1) / 6  #condition nécessaire pour avoir un système de Steiner
    liste3 = P3(E)
    m = len(liste3)
    for j in range(Nmax):  #Nmax est le nombre maximal d'essais
        S = []
        for i in range(p):
            S.append(liste3[randint(m)]) #on forme au hasard une liste de p triplets
        if teststeiner(E, S) == 1:
            print(S) #on affiche les systèmes de Steiner trouvés
    return("fin")
```

7. La fonction suivante permet de trouver des systèmes de Steiner sur un ensemble à 7 éléments sans peine et en utilisant un ordinateur peu puissant :

```
>>> recherchesteiner([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7],1000000)
[[1, 3, 5], [2, 3, 7], [1, 2, 4], [1, 6, 7], [3, 4, 6], [4, 5, 7], [2, 5, 6]]
[[3, 5, 7], [1, 6, 7], [4, 5, 6], [2, 4, 7], [1, 2, 5], [1, 3, 4], [2, 3, 6]]
'fin'
```

On peut se demander combien, il existe de systèmes de Steiner différents sur un ensemble donné. Si la question vous intéresse, vous pouvez consulter l'article que l'on peut trouver sur internet : "une question de Cayley relative au problème des triades de Steiner" de Severin Bays.

Même en prenant $Nmax$ grand et en laissant tourner le programme assez longtemps, il semble assez improbable de trouver par cette recherche "à l'aveugle" un système de Steiner sur un ensemble à 15 éléments.

Il est clair que les fonctions proposées peuvent être optimisées pour former de façon plus maligne l'ensemble de triplets S dont on teste s'il est un système de Steiner. Cependant même avec quelques optimisations, il n'est pas évident que l'on puisse trouver ainsi un système de Steiner sur un ensemble à 15 éléments.

Acte III-15 est un nombre de Steiner

1. (a) Par définition les éléments des triplets de $\mathcal{F}$ appartiennent à F. Prenons une paire de F, notée $\{a, b\}$, les deux éléments de la paire sont en particulier des éléments de E ainsi ils sont inclus dans un unique triplet de $\mathcal{E}$, noté $\{a, b, c\}$. La partie F étant supposée stable, ceci implique que $c \in F$. Les trois éléments du triplet $\{a, b, c\}$ sont dans F donc ce triplet appartient à $\mathcal{F}$. Nous avons finalement démontré que toute paire de F est incluse dans un unique triplet de $\mathcal{F}$, ce qui démontre que :

$$\boxed{\mathcal{F} \text{ est un système de Steiner sur } F}$$

   (b) On prend un élément de E quelconque a. On pose $F = \{a\}$ qui est une partie stable de E. L'ensemble vide est un système de Steiner sur F donc un sous-système de Steiner de E d'ordre 1.

   (c) On prend un triplet de $\mathcal{E}$: $\{a, b, c\}$. La partie $F = \{a, b, c\}$ est stable et $\mathcal{F} = \{a, b, c\}$ est clairement un système de Steiner sur F donc un sous-système de Steiner de E d'ordre 3.

2. On considère a_i et a_j deux éléments quelconques de P, éventuellement égaux avec $(i, j) \in [\![0, s-1]\!]^2$. Effectuons la division euclidienne de $-i-j$ par s, il existe un unique quotient $q \in \mathbb{Z}$ et un unique reste $k \in [\![0, s-1]\!]$ tels que :

$$-i - j = qs + k \Leftrightarrow i + j + k = -qs \Leftrightarrow i + j + k \equiv 0 \ [s]$$

Ce qui démontre l'existence d'un unique $k \in [\![0, s-1]\!]$ et donc d'un unique élément de P tel que $< a_i, a_j, a_k > \in \mathcal{P}$.

$$\boxed{\mathcal{P} \text{ est un pseudo système de Steiner de } P}$$

3. (a) Sur un ensemble à 3 éléments, il n'y a qu'une seul système de Steiner possible :

$$\mathcal{E} = \{\{a, b, c\}\} \text{ et } \mathcal{G} = \{\{1, 2, 3\}\}$$

R n'ayant qu'un élément, on a $r = 1$ et on est dans le cas particulier où $\mathcal{R} = \emptyset$. On a :

$$P = E \setminus R = \{b, c\}$$

et par suite $s = 2$. Pour déterminer $\mathcal{P}$, on suit la démarche de la question précédente en posant $b = a_0$ et $c = a_1$. Étant donné que la somme des indices des listes de $\mathcal{P}$ doit être congrue à 0 modulo 2.

$$\mathcal{P} = \{< a_0, a_0, a_0 >, < a_0, a_1, a_1 >\}$$

Par définition $L = R \cup (P \times G)$, ainsi :

$$L = \{a, (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3)\}$$

Les éléments de $\mathcal{L}$ sont les suivants :

Type 1 : $\mathcal{R}$ est vide, il n'y a aucun triplet de type 1.

Type 2 : les triplets correspondants sont $\{a, (b, 1), (c, 1)\}$, $\{a, (b, 2), (c, 2)\}$ et $\{a, (b, 3), (c, 3)\}$.

Type 3 : il n'y a aucun triplet car si l'on prend trois éléments de P, on ne peut avoir le triplet qui appartient à $\mathcal{E}$.

Type 4 : les triplets correspondants sont $\{(b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$, $\{(b, 1), (c, 2), (c, 3)\}$, $\{(c, 1), (b, 2), (c, 3)\}$ et $\{(c, 1), (c, 2), (b, 3)\}$.

$$\boxed{\mathcal{L} = \{\{a, (b, 1), (c, 1)\}, \{a, (b, 2), (c, 2)\}, \{a, (b, 3), (c, 3)\}, \{(b, 1), (b, 2), (b, 3)\}, \{(b, 1), (c, 2), (c, 3)\}, \{(c, 1), (b, 2), (c, 3)\}, \{(c, 1), (c, 2), (b, 3)\}\}}$$

Quitte à changer le nom des éléments de l'ensemble, on retrouve le système sur un ensemble à 7 éléments donné dans la partie A.

(b) Les ensembles R et $P \times G$ sont disjoints à cause de la nature des éléments qui les composent, cela permet de dire que :

$$\text{Card}(L) = \text{Card}(R) + \text{Card}(P \times G) = \text{Card}(R) + \text{Card}(P) \times \text{Card}(G) = r + sm$$

$$\boxed{\text{Card}(L) = r + sm}$$

(c) Prenons deux éléments x et y distincts de L, notre but est de démontrer que cette paire est incluse dans un unique triplet de $\mathcal{L}$. Pour cela, il y a plusieurs cas à considérer.

i. Si x et y sont deux éléments de R, la paire $\{x, y\}$ est incluse dans un unique triplet de type 1 puisque $\mathcal{R}$ est un système de Steiner sur R. Cette paire ne peut être incluse dans un triplet de type 2, 3 ou 4 puisque certains éléments de ces triplets sont des couples.

ii. Si $a \in R$ et $y \in P \times G$, la paire $\{a, y\}$ ne peut être incluse que dans un triplet de type 2. Notons $y = (b, g) \in P \times G$. Étant donné que $\mathcal{E}$ est un système de Steiner sur E, il existe un unique $c \in E$ tel que $\{a, b, c\} \in \mathcal{E}$. De plus $c \notin R$, sinon comme $a \in R$, on aurait $b \in R$ car R est stable, ce qui n'est pas le cas : ce qui démontre que $c \in P$. Ainsi la paire $\{a, y\}$ est incluse dans le triplet $\{a, (b, g), (c, g)\}$ est uniquement dans celui-ci.

iii. Si x et y sont deux éléments de $P \times G$, on pose $x = (b, g_2) \in P \times G$ et $y = (c, g_3) \in P \times G$. Il y a trois cas à considérer :

• Si $g_2 = g_3$, nécessairement $b \neq c$ car x et y sont distincts. Il existe un unique $a \in E$ tel que $\{a, b, c\} \in \mathcal{E}$. Dans le cas où $a \in R$, on a bien la paire $\{x, y\}$ qui est incluse dans l'unique triplet de type 2 : $\{a, (b, g_2), (c, g_2)\}$.

• En reprenant les notations du cas précédent, on a sinon $a \notin R$ donc $a \in P$. La paire $\{x, y\}$ est alors incluse dans l'unique triplet de type 3 : $\{(a, g_2), (b, g_2), (c, g_2)\}$.

• Enfin si $g_2 \neq g_3$. La paire $\{x, y\}$ est incluse dans le triplet de type 4 : $\{(a', g_1), (b, g_2), (c, g_3)\}$ où a' est l'unique élément de P tel que $< a', b, c > \in \mathcal{P}$ et g_1 est tel que $\{g_1, g_2, g_3\} \in \mathcal{G}$, il est également unique.

iv. Finalement une paire quelconque d'éléments de L est incluse dans un unique triplet de $\mathcal{L}$:

$$\boxed{\mathcal{L} \text{ est un système de Steiner sur } L}$$

4. D'après la question 3. de la partie I, il existe des systèmes de Steiner d'ordre 1 et 3, il est donc possible d'appliquer la construction précédente avec $m = 1$ ou $m = 3$. D'après la question 1. de la partie III, il est possible de choisir une partie stable ayant 1 éléments (dès que $n \geq 1$) ou 3 éléments (dès que $n \geq 3$), on peut ainsi prendre $r = 1$ ou $r = 3$.

(a) Si n est un nombre de Steiner, on applique la construction précédente en prenant E un ensemble à n éléments, $\mathcal{E}$ un système de Steiner correspondant. On prend $m = 3$ (avec G un ensemble quelconque à 3 éléments) et $r = 0$. D'après la question 3.(b), l'ensemble L correspondant aura $r + ms = r + m(n - r) = 3n$ et $\mathcal{L}$ est un système de Steiner sur L.

$$\boxed{(n \in J) \Rightarrow (3n \in J)}$$

(b) Si n est un nombre de Steiner, on applique la construction précédente en prenant E un ensemble à n éléments, $\mathcal{E}$ un système de Steiner correspondant. On prend $m = 3$ (avec G un ensemble quelconque à 3 éléments) et $r = 1$ (ce qui est possible car $n \geq 1$). D'après la question 3.(b), l'ensemble L correspondant aura $r + ms = r + m(n - r) = 1 + 3(n - 1) = 3n - 2$ et $\mathcal{L}$ est un système de Steiner sur L.

$$\boxed{(n \in J \text{ et } n \geq 1) \Rightarrow (3n - 2 \in J)}$$

(c) Si n est un nombre de Steiner, on applique la construction précédente en prenant E un ensemble à n éléments, $\mathcal{E}$ un système de Steiner correspondant. On prend $m = 3$ (avec G un ensemble quelconque à 3 éléments) et $r = 3$ (ce qui est possible car $n \geq 3$). D'après la question 3.(b), l'ensemble L correspondant aura $r + ms = r + m(n - r) = 3 + 3(n - 3) = 3n - 6$ et $\mathcal{L}$ est un système de Steiner sur L.

$$\boxed{(n \in J \text{ et } n \geq 3) \Rightarrow (3n - 6 \in J)}$$

5. On sait déjà que 3 et 7 sont des nombres de Steiner, la question précédente nous permet de dire que :

$$9 = 3 \times 3 \in J$$

$$15 = 3 \times 7 - 6 \in J$$

$$19 = 3 \times 7 - 2 \in J$$

$$21 = 3 \times 7 \in J$$

$$25 = 3 \times 9 - 2 \in J$$

$$27 = 3 \times 9 \in J$$

$$\boxed{3,\ 7,\ 9,\ 15,\ 19,\ 21,\ 25,\ 27 \text{ sont des nombres de Steiner}}$$

6. (a) On a choisi :

$$\mathcal{E} = \{\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{a, f, g\}, \{b, d, f\}, \{b, e, g\}, \{c, d, g\}, \{c, e, f\}\}$$

Nous n'avons pas le choix pour $\mathcal{G}$ et $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{G} = \{\{1, 2, 3\}\} \text{ et } \mathcal{R} = \{\{a, b, c\}\}$$

Avec les notations de la question 3., nous avons ainsi : $r = 3$, $s = 4$ et $P = \{d, e, f, g\}$.

(b) Il s'agit de former l'ensemble de tous les listes ordonnées possibles avec $a_0 = d$, $a_1 = e$, $a_2 = f$ et $a_3 = g$ telles que la somme des indices soit congrue à 0 modulo 4. On obtient :

$$\mathcal{P} = \{< d, d, d >, < d, e, g >, < d, f, f >, < e, e, f >, < f, g, g >\}$$

(c) Par définition $L = \mathcal{R} \cup (P \times G)$, ce qui nous donne :

$$L = \{a, b, c, (d, 1), (d, 2), (d, 2), (e, 1), (e, 2), (e, 3), (f, 1), (f, 2), (f, 3), (g, 1), (g, 2), (g, 3)\}$$

C'est comme voulu un ensemble à 15 éléments.

(d) D'après la question 1.(c) de l'acte II, le nombre de triplets d'un système de Steiner sur un ensemble à n éléments vaut $p = \dfrac{n(n-1)}{6}$. Ici $n = 15$, ce qui nous permet de dire que :

$$\boxed{\text{Card}(\mathcal{L}) = 35}$$

(e) Donnons les triplets type par type :

Type 1 : $\{a, b, c\}$

Type 2 :

$\{a, (d,1), (e,1)\}$	$\{a, (f,1), (g,1)\}$	$\{b, (d,1), (f,1)\}$	$\{b, (e,1), (g,1)\}$	$\{c, (d,1), (g,1)\}$	$\{c, (e,1), (f,1)\}$
$\{a, (d,2), (e,2)\}$	$\{a, (f,2), (g,2)\}$	$\{b, (d,2), (f,2)\}$	$\{b, (e,2), (g,2)\}$	$\{c, (d,2), (g,2)\}$	$\{c, (e,2), (f,2)\}$
$\{a, (d,3), (e,3)\}$	$\{a, (f,3), (g,3)\}$	$\{b, (d,3), (f,3)\}$	$\{b, (e,3), (g,3)\}$	$\{c, (d,3), (g,3)\}$	$\{c, (e,3), (f,3)\}$

Type 3 : Aucun. En effet, il n'y a pas de triplet de $\mathcal{E}$ qui ne contient ni a, ni b, ni c.

Type 4 :

$\{(d,1), (d,2), (d,3)\}$	$\{(d,2), (e,3), (g,1)\}$	$\{(f,1), (d,2), (f,3)\}$	$\{(f,1), (e,2), (e,3)\}$
$\{(d,1), (e,2), (g,3)\}$	$\{(d,3), (e,2), (g,1)\}$	$\{(f,1), (f,2), (d,3)\}$	$\{(f,1), (g,2), (g,3)\}$
$\{(d,1), (e,3), (g,2)\}$	$\{(d,3), (e,1), (g,2)\}$	$\{(e,1), (e,2), (f,3)\}$	$\{(g,1), (f,2), (g,3)\}$
$\{(d,2), (e,1), (g,3)\}$	$\{(d,1), (f,2), (f,3)\}$	$\{(e,1), (f,2), (e,3)\}$	$\{(g,1), (g,2), (f,3)\}$

J'ai trouvé ces triplets grâce au logiciel Python, vous trouverez en annexe les fonctions permettant cette recherche.

Acte IV-Le cercle des 13 points

1. C'est une vérification rapide en notant d la distance, on a :

$$d(P_0, P_1) = 1,\ d(P_0, P_4) = 4,\ d(P_1, P_1) = 3,\ d(P_0, P_2) = 2,\ d(P_2, P_8) = 6,\ d(P_0, P_8) = 5$$

   Ce qui démontre le résultat voulu.

2. Soit P et Q deux points distincts du cercle, la distance entre P et Q est un entier entre 1 et 6. D'après la question précédente, cet entier correspond à la longueur d'un unique côté de l'un des triangles T_1 ou T_2. L'ensemble $\{P, Q\}$ est ainsi contenu dans un unique triangle obtenu à partir de T_1 ou T_2 par rotation. C'est-à-dire que la paire $\{T_1, T_2\}$ est incluse dans un unique triangle de $\mathcal{E}$, ce qui constitue la définition d'un système de Steiner.

$$\boxed{\text{13 est un nombre de Steiner}}$$

3. On procède de même avec 7 points régulièrement espacés sur un cercle. La distance entre deux points vaut 1, 2 ou 3. On considère le triangle $T = \{P_0, P_1, P_3\}$. Les longueurs des côtés de T valent 1, 2 et 3. De même que dans la question précédente, on en déduit que l'ensemble des 7 triangles obtenus par rotation de T forment un système de Steiner sur cet ensemble à 7 éléments.

Acte V-Caractérisation des nombres de Steiner

1. (a) On a nécessairement $c \in P$ car si $c \in R$ alors $b \in R$ (puisque R est stable et $a \in R$) ce qui est absurde. Les entiers n et r sont des nombres de Steiner non nuls donc il sont impairs d'après la question 3. de l'acte II. Ainsi $s = n - r$ est un entier pair, pour créer $\mathcal{P}$, il s'agit de suivre la construction de l'énoncé en commençant par numéroter les éléments de P. Posons :

$$a_0 = b \text{ et } a_{\frac{s}{2}} = c$$

On a bien $< b, b, b > \in \mathcal{P}$ car $0 + 0 + 0 \equiv 0\ [s]$ et $< b, c, c > \in \mathcal{P}$ car $0 + \dfrac{s}{2} + \dfrac{s}{2} \equiv 0\ [s]$.

(b) Puisque $m \geq 3$, il est possible de choisir $(g_1, g_2, g_3) \in G^3$ tels que $\{g_1, g_2, g_3\} \in \mathcal{G}$. Considérons la partie de L suivante :

$$L' = \{a, (b, g_1), (c, g_1), (b, g_2), (c, g_2), (b, g_3), (c, g_3)\}$$

Cette partie de L admet un sous-système de Steiner inclus dans $\mathcal{L}$, c'est le suivant :

$$\mathcal{L}' = \{\{a, (b, g_1), (c, g_1)\}, \{a, (b, g_2), (c, g_2)\}, \{a, (b, g_3), (c, g_3)\}, \{(b, g_1), (b, g_2), (b, g_3)\}, \{(b, g_1), (c, g_2), (c, g_3)\},$$
$$\{(c, g_1), (b, g_2), (c, g_3)\}, \{(c, g_1), (c, g_2), (b, g_3)\}\}$$

En effet les trois premiers triplets sont de type 2 et les quatre triplets suivants sont de type 3. On vérifie que toute paire de L' est incluse dans un unique triplet de $\mathcal{L}'$.

$$\boxed{L \text{ admet un sous-système de Steiner d'ordre } 7}$$

2. (a) Soit $n \in T$ et E un ensemble ayant un système de Steiner d'ordre n admettant un sous-système de Steiner d'ordre 7. La construction de la question 3. de l'acte III appliquée avec $r = 0$ et $m = 3$, nous donne un système de Steiner d'ordre $3n$ dont E est un sous-système de Steiner qui admet lui-même un sous-système de Steiner d'ordre 7. Ce qui démontre que $3n \in T$.

(b) Soit $n \in J$ avec $n > 1$, on sait d'après la question 4.(b) de l'acte III que $3n - 2 \in J$ et dans cette question nous avions pris $r = 1$ et $m = 3$. D'après la question 1., dont les hypothèses sont alors vérifiées, on peut en déduire que $3n - 2 \in T$.

(c) C'est exactement le même raisonnement qu'à la question précédente. Dans la question 4.(c) de l'acte III, nous avions pris $r = 3$ et $m = 3$, étant donnée que $n > 3$, les hypothèses de la question 1. sont vérifiées et on obtient $3n - 6 \in T$.

(d) Si $n \in T$, on applique la construction de la question 3. de l'acte III avec $m = 3$ et $r = 7$, pour obtenir un système d'ordre $3n - 14$ qui admet bien un sous-système d'ordre 7. Ce qui démontre que $3n - 14 \in T$.

(e) Enfin si $m \in S$, on peut appliquer la construction avec $n = 3$ et $r = 1$ pour obtenir un système d'ordre $2m + 1$ qui admet un sous-système d'ordre 7, ainsi $2m + 1 \in T$.

3. L'un des nombres $\dfrac{n}{3}$, $\dfrac{n+2}{3}$, $\dfrac{n+6}{3}$, $\dfrac{n+14}{3}$ est un entier congru à 1 ou 3 modulo 6 si et seulement si :

$$\begin{cases} n \equiv 3 \text{ ou } 9\ [18] & \text{ou} \\ n \equiv 1 \text{ ou } 7\ [18] & \text{ou} \\ n \equiv 15 \text{ ou } 3\ [18] & \text{ou} \\ n \equiv 7 \text{ ou } 13\ [18] \end{cases}$$

Ceci démontre bien le résultat voulu car si $n \equiv 1$ ou $3\ [6]$ alors $n \equiv 1, 3, 7, 9, 13$ ou $15\ [18]$.

4. Les entiers en questions sont ceux de l'ensemble : $\{15, 19, 21, 25, 27, 31, 33, 37, 39, 43\}$. On utilise systématiquement la question 2. pour obtenir : $15 = 3 \times 7 - 6$ et $7 \in J,$ donc $15 \in T$
   $19 = 3 \times 7 - 2$ et $7 \in J,$ donc $19 \in T$
   $21 = 3 \times 7$ et $7 \in T,$ donc $21 \in T$
   $25 = 3 \times 9 - 2$ et $9 \in J,$ donc $25 \in T$
   $27 = 2 \times 13 + 1$ et $13 \in J,$ donc $27 \in T$
   $31 = 3 \times 15 - 14$ et $15 \in T,$ donc $31 \in T$
   $33 = 3 \times 13 - 6$ et $13 \in J,$ donc $33 \in T$
   $37 = 3 \times 13 - 2$ et $13 \in J,$ donc $37 \in T$
   $39 = 3 \times 15 - 6$ et $15 \in J,$ donc $39 \in T$
   $43 = 3 \times 15 - 2$ et $15 \in J,$ donc $43 \in T$
5. Si $n \geq 45$ est un entier congru à 1 ou 3 modulo 6, les nombres $\frac{n}{3}$, $\frac{n+2}{3}$, $\frac{n+6}{3}$, $\frac{n+14}{3}$ sont compris entre 15 et $n-1$ et l'un d'entre eux est un entier congru à 1 ou 3 modulo 6. On voit donc par récurrence que T contient tous les entiers congrus à 1 ou 3 modulo 6 supérieurs à 15.
6. Les entiers congrus à 1 ou 3 modulo 6 qui sont majorés par 14 sont déjà connus comme étant des nombres de Steiner et les suivants sont dans T. Il en résulte que :

$$\boxed{n > 0 \text{ est un nombre de Steiner si et seulement } n \equiv 1 \text{ ou } 3 \ [6]}$$

Annexe

Voici les fonctions Python qui permette la construction du système de Steiner sur un ensemble à 15 éléments demandée à la question 6. de l'acte III. Les éléments des ensembles sont des entiers naturels avec la conversion suivante : $a \to 1$, $b \to 2$, $c \to 3$, $d \to 4$, $e \to 5$, $f \to 6$, $g \to 7$, $1 \to 8$, $2 \to 9$, $3 \to 10$.

```python
E = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7],
ES = [[1, 2, 3], [1, 4, 5], [1, 6, 7], [2, 4, 6], [2, 5, 7], [3, 4, 7], [3, 5, 6]]
G = [8, 9, 10]
GS = [[8, 9, 10]]
R = [1, 2, 3]
RS = [[1, 2, 3]]
P=[4, 5, 6, 7]
PS = [[4, 4, 4], [4, 5, 7], [4, 6, 6], [5, 5, 6], [6, 7, 7]]
L = [1, 2, 3, [4, 8], [4, 9], [4, 10], [5, 8], [5, 9], [5, 10], [6, 8], [6, 9], [6, 10], [7, 8], [7, 9], [7, 10]]



def trouvePS():
    """détermine un pseudo système de Steiner sur P"""
    F = []
    P = [4, 5, 6, 7] #ici s=4
    for i in range(4):
        for j in range(i, 4):
            for k in range(j, 4):
                if (i + j + k) % 4 == 0: #la condition de congruence modulo s
                    F = F + [[P[i], P[j], P[k]]]
    print(F)

def T1():
    """triplets de type 1"""
    return(RS)

def appart(tr, Li):
    """teste si le triplet tr est dans la liste Li"""
    for ele in Li:
        a = ele[0]
        b = ele[1]
        c = ele[2]
        if (tr == [a, b, c]) or (tr == [a, c, b]) or (tr == [b, a, c]) or (tr == [b, c, a]) or (tr == [c, b, a]) or (tr == [c, a, b]):
            return(1)
    return(0)


def T2():
    """triplets de type 2"""
    Li = []
    for a in R:
        for b in P:
            for c in P:
                for g in G:
                    if appart([a, b, c], ES):
                        Li = Li + [[a, [b, g], [c, g]]]
    return(Li)

def T3():
    """triplets de type 3"""
    Li = []
    for a in P:
        for b in P:
            for c in P:
                for g in G:
                    if appart([a, b, c], ES):
                        Li = Li + [[a, [b, g], [c, g]]]
    return(Li)

def T4():
    """triplets de type 4"""
    Li = []
    for g1 in G:
        for g2 in G:
            for g3 in G:
                for a in P:
                    for b in P:
                        for c in P:
                            if (appart([g1, g2, g3], GS) == 1) and (appart([a, b, c], PS) == 1):
                                Li = Li + [[[a, g1], [b, g2], [c, g3]]]
    return(Li)

def tri(L):
    """enlève les doublons des listes obtenus puisque l'ordre n'a pas d'importance"""
    newL = []
    for i in L:
        if not(appart(i, newL)):
            newL = newL + [i]
    return(newL)

LS = tri(T1() + T2() + T3() +T4())
print(LS)
print(len(LS))
```

Voici ce que l'on obtient après exécution du script :

```
[[1, 2, 3], [1, [4, 8], [5, 8]], [1, [4, 9], [5, 9]], [1, [4, 10], [5, 10]], [1, [6, 8], [7, 8]], [1,
[6, 9], [7, 9]], [1, [6, 10], [7, 10]], [2, [4, 8], [6, 8]], [2, [4, 9], [6, 9]], [2, [4, 10], [6, 10]
], [2, [5, 8], [7, 8]], [2, [5, 9], [7, 9]], [2, [5, 10], [7, 10]], [3, [4, 8], [7, 8]], [3, [4, 9], [
7, 9]], [3, [4, 10], [7, 10]], [3, [5, 8], [6, 8]], [3, [5, 9], [6, 9]], [3, [5, 10], [6, 10]], [[4, 8
], [4, 9], [4, 10]], [[4, 8], [5, 9], [7, 10]], [[4, 8], [6, 9], [6, 10]], [[4, 8], [7, 9], [5, 10]],
[[5, 8], [4, 9], [7, 10]], [[5, 8], [5, 9], [6, 10]], [[5, 8], [6, 9], [5, 10]], [[5, 8], [7, 9], [4,
10]], [[6, 8], [4, 9], [6, 10]], [[6, 8], [5, 9], [5, 10]], [[6, 8], [6, 9], [4, 10]], [[6, 8], [7, 9]
, [7, 10]], [[7, 8], [4, 9], [5, 10]], [[7, 8], [5, 9], [4, 10]], [[7, 8], [6, 9], [7, 10]], [[7, 8],
[7, 9], [6, 10]]]
35
```