Problème

L'objectif de ce problème est d'étudier certaines suites définies à l'aide de la partie entière.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. On appelle partie décimale de x le réel défini par :

$$M(x) = x - \lfloor x \rfloor$$

Dans la partie A, nous étudierons quelques exemples autour de la suite $(M(nx))$ où x est un réel fixé et plus généralement $(M(a_n))$ avec (a_n) une suite réelle. Les résultats de cette partie A n'interviennent pas dans la suite du problème.

Dans les parties suivantes, nous étudierons la suite $(\lfloor nx \rfloor)_{n\geq 1}$ où x est un réel strictement positif fixé en démontrant notamment le théorème de Beatty puis en l'appliquant au jeu de Wythoff.

A-Exemples de suites de parties décimales

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $M(x) \in [0, 1[$.
2. **Cas où x est rationnel.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = M(nx)$.
   (a) On suppose que $x \in \mathbb{Z}$, que dire de la suite (u_n) ?
   (b) Dans cette question, on prend $x \in \mathbb{Q}$.
      i. Soit $x = \dfrac{2}{5}$, décrire le comportement de la suite (u_n). On commencera par donner les 12 premiers termes de la suite.
      ii. On pose $x = \dfrac{p}{q}$ où $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Démontrer que (u_n) est une suite périodique de période q.
      iii. En déduire que (u_n) n'est pas dense dans $[0, 1[$.

      On peut démontrer que, réciproquement, si x est irrationnel alors (u_n) est dense dans $[0, 1[$ mais ce n'est pas l'objectif de cette partie.

3. **Exemples de suites denses dans** $[0, 1[$. On dit qu'une suite réelle positive (a_n) est à croissance lente si et seulement si (a_n) est croissante,
   $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$.
   (a) Les suites suivantes sont-elles à croissance lente ? On justifiera dans chaque cas la réponse.
      i. (n^2).
      ii. $(\sqrt{n})$.
      iii. $(\ln(n))_{n\geq 1}$.
   (b) Soit (a_n) une suite réelle positive à croissance lente. On se donne $(a, b) \in [0, 1[^2$ tels que $0 \leq a < b < 1$ et on note $\varepsilon = \dfrac{b - a}{2}$.
      i. Justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ |a_{n+1} - a_n| \leq \varepsilon$.
      ii. On pose $A = \lfloor a_N \rfloor + 1$. Justifier qu'il existe $N' \geq N$ tel que $a_{N'} \geq A + 1$.
      iii. Démontrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_{n_0} \in [A + a, A + b]$. On pourra représenter $a_N,\ a_{N'}$ et l'intervalle $[A + a, A + b]$ sur l'axe réel et remarquer que l'intervalle $[A + a, A + b]$ est de longueur 2ε.
      iv. En déduire que $(M(a_n))$ est dense dans $[0, 1[$.
      v. En déduire deux exemples de suites denses dans l'intervalle $[0, 1[$.

B-Spectre d'un nombre réel

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle spectre de x l'ensemble défini par :

$$Sp(x) = \{\lfloor nx \rfloor,\ n \in \mathbb{N}^*\}$$

1. **Exemples.** Déterminer le spectre de x dans les cas suivants :
   (a) $x = 1$.
   (b) $x = \dfrac{1}{2}$.
   (c) $x = 3$.
   (d) $x = \dfrac{5}{2}$.
2. **Étude du spectre de $x \in]0,1[$.** On se donne un réel $x \in]0,1[$ et on considère l'application :

$$\begin{array}{rccl} f_x & : & \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{N} \\ & & n & \mapsto & \lfloor nx \rfloor \end{array}$$

   (a) Quel est le lien entre f_x et $Sp(x)$?
   (b) i. Montrer qu'il est possible de choisir $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $mx < m-1$. En déduire que $f_x(m) \leq m-2$.
   ii. On suppose que f_x est injective, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_x(n) \geq n-1$.
   iii. En déduire que pour $x \in]0,1[$, f_x n'est pas injective.
   (c) Soit $p \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \leq nx < p+1$. En déduire que f_x est surjective.
   (d) Quel est le spectre d'un réel $x \in]0,1[$?
3. **Étude du spectre de $x \geq 1$.** On se donne un réel $x \geq 1$ et on définit l'application f_x de la même manière qu'à la question précédente.
   (a) Montrer que f_x est strictement croissante, en déduire que f_x est injective.
   (b) L'application f_x est-elle surjective ?
   (c) On suppose dans cette question que $x > 1$, montrer que $\overline{Sp(x)}$ est infini avec $\overline{Sp(x)}$ qui désigne le complémentaire de $Sp(x)$ dans $\mathbb{N}^*$.
4. **L'application spectre.** On considère l'application :

$$\begin{array}{rccl} Sp & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \\ & & x & \mapsto & Sp(x) \end{array}$$

   (a) Montrer que Sp est injective.
   (b) Montrer que Sp n'est pas surjective.
5. **Cas des entiers.**
   (a) Expliciter $Sp(4) \cap Sp(10)$.
   (b) Plus généralement, que vaut $Sp(a) \cap Sp(b)$ avec $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$?

C-Théorème de Beatty

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème de Beatty qui s'énonce ainsi :

Théorème de Beatty :
Soient $(a,b) \in]1,+\infty[^2$, on a :

$$Sp(a) \text{ et } Sp(b) \text{ forment une partition de } \mathbb{N}^* \Leftrightarrow a \text{ et } b \text{ sont irrationnels et } \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$$

1. **Préliminaires.** Les deux questions suivantes n'interviennent pas dans la preuve du théorème mais elles permettent d'illustrer l'énoncé.
   (a) Rappeler les trois conditions données dans le cours afin que $Sp(a)$ et $Sp(b)$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.
   (b) Donner deux parties de $\mathbb{N}^*$, A et B, formant une partition de $\mathbb{N}^*$ avec :
      i. A finie et B infinie.
      ii. A et B infinies.
   (c) Donner un exemple de deux nombres irrationnels $a>1$ et $b>1$ tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$. On démontrera l'irrationalité des nombres utilisés.
2. **Preuve du sens** ($\Rightarrow$). On se donne $(a,b) \in]1,+\infty[^2$ tels que $Sp(a)$ et $Sp(b)$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite :
   $$u_n(a) = \text{Card}\Big(\llbracket 1,n \rrbracket \cap Sp(a)\Big)$$
   En d'autres termes, $u_n(a)$ est le nombre d'éléments du spectre de a compris entre 1 et n.
   (a) À titre d'exemple, calculer les 10 premiers termes de la suite $(u_n(\sqrt{2}))$. On rappelle que $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$.
   (b) **Convergence de la suite** $\left(\frac{u_n(a)}{n}\right)$**.**
      i. Montrer que si $(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $k \neq l$ alors $\lfloor ka \rfloor \neq \lfloor la \rfloor$. On pourra pour cela supposer sans perte de généralité que $k>l$ et démontrer pour commencer que $ka - la > 1$.
      ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $\{k \in \mathbb{N},\ \lfloor ka \rfloor \leq n\}$ possède un maximum que l'on note p et démontrer que :
      $$\frac{n+1}{a} - 1 \leq p < \frac{n+1}{a}$$
      iii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq a$. Justifier que :
      $$\frac{n+1}{a} - 1 \leq u_n(a) < \frac{n+1}{a}$$
      iv. En déduire que $\left(\frac{u_n(a)}{n}\right)$ converge vers $\frac{1}{a}$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
      i. Justifier que $\llbracket 1,n \rrbracket = (\llbracket 1,n \rrbracket \cap Sp(a)) \cup (\llbracket 1,n \rrbracket \cap Sp(b))$.
      ii. Justifier que $\emptyset = (\llbracket 1,n \rrbracket \cap Sp(a)) \cap (\llbracket 1,n \rrbracket \cap Sp(b))$.
      iii. En déduire que : $u_n(a) + u_n(b) = n$.
      iv. Démontrer enfin que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$.
   (d) i. Montrer que $\frac{a}{b}$ est irrationnel. On pourra démontrer que s'il était rationnel alors $Sp(a) \cap Sp(b) \neq \emptyset$.
      ii. Montrer que a est irrationnel et en déduire que b est irrationnel.

3. **Preuve du sens** ($\Leftarrow$). On se donne $a > 1$ et $b > 1$ deux nombres irrationnels tels que $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$.
   Le but est de démontrer que $Sp(a)$ et $Sp(b)$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.
   (a) Par l'absurde, on suppose que $Sp(a) \cap Sp(b) \neq \emptyset$ et on considère $k \in Sp(a) \cap Sp(b)$.
      i. Justifier qu'il existe $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $k = \lfloor ma \rfloor = \lfloor nb \rfloor$.
      ii. Démontrer que :
      $$ma - 1 < k < ma \text{ et } nb - 1 < k < nb$$
      iii. En déduire que : $m + n - 1 < k < m + n$. Conclure.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $i = \left\lfloor \dfrac{k}{a} \right\rfloor$ et $j = \left\lfloor \dfrac{k}{b} \right\rfloor$.
      i. Montrer que si $k \notin Sp(a)$ alors $ia < k < ia + a - 1$.
      ii. Montrer que si $k \notin Sp(a) \cup Sp(b)$ alors $i + j < k < i + j + 1$.
      iii. En déduire que $Sp(a) \cup Sp(b) = \mathbb{N}^*$. Conclure.
4. **Étude d'un exemple.**
   (a) La suite de Fibonacci est une suite assez méconnue définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On considère φ le nombre d'or, c'est-à-dire la solution positive de l'équation $x^2 = x + 1$. Exprimer (F_n) en fonction de n et de φ.
   (b) Montrer que $Sp(\varphi)$ et $Sp(\varphi^2)$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$. On pourra admettre dans cette question l'irrationalité de $\sqrt{5}$ qui se démontre en adaptant la preuve vue pour $\sqrt{2}$.
   (c) Réciproquement, montrer que pour $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 1$, si $Sp(a)$ et $Sp(a^2)$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$ alors $a = \varphi$.

D-Jeu de Wythoff

On reprend les notations de la fin de la partie C en considérant les suites $u_n = \lfloor n\varphi \rfloor$ et $v_n = \lfloor n\varphi^2 \rfloor$ pour $n \geq 1$. Comme $Sp(\varphi)$ et $Sp(\varphi^2)$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$, on sait que tout entier $p \in \mathbb{N}^*$ est un élément de la suite (u_n) ou de la suite (v_n) mais pas des deux suites à la fois.

On considère le jeu suivant, deux joueurs sont placés devant deux piles de jetons. À tour de rôle, chaque joueur retire un nombre non nul de jetons dans l'une des deux piles ou retire le même nombre non nul de jetons dans les deux piles. Le gagnant du jeu est celui qui prend le dernier jeton. On note x et y avec $x \leq y$ le nombre de jetons des piles à une étape du jeu donnée. L'état (x, y) est dit configuré s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = u_n$ et $y = v_n$. Par convention l'état $(0, 0)$ qui est l'état gagnant est également configuré.

1. **Premiers résultats.**
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = n$.
   (b) Justifier que quelque soit l'état initial, le jeu se termine.
   (c) L'état actuel du jeu est $(3, 4)$, quel coup jouer pour être certain de gagner ?
2. Montrer que si l'état $(x, y) \neq (0, 0)$ est configuré alors l'état suivant ne l'est pas quelque soit le coup joué.
3. Montrer que si l'état (x, y) n'est pas configuré, il est possible de jouer de façon à ce que l'état suivant le soit.
4. On fixe l'état initial des piles (x, y). Souhaitez-vous commencer le jeu ?