

1-Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto (x^2 + 3)\text{ch}(x)$.

2-Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto x^n \ln(x)$.

3-Donner une primitive sur $] - 1, 1[$ de la fonction Arcsin.

4-★ Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{3 + \ln(x)}{(4 + \ln(x))^2}$.

1-Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto (x^2 + 3)\text{ch}(x)$.

Réponse : On intègre deux fois par parties afin de faire chuter le degré de la fonction polynomiale mise en jeu. Les fonctions polynomiales, les fonctions ch et sh sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 3)\text{ch}(x)dx &= [(x^2 + 3)\text{sh}(x)] - \int 2x\text{sh}(x)dx \\ &= (x^2 + 3)\text{sh}(x) - [2x\text{ch}(x)] + \int 2\text{ch}(x)dx \\ &= (x^2 + 3)\text{sh}(x) - 2x\text{ch}(x) + 2\text{sh}(x) \\ &= (x^2 + 5)\text{sh}(x) - 2x\text{ch}(x)\end{aligned}$$

2-Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto x^n \ln(x)$.

Réponse : On pose :

$$\begin{aligned} u'(x) &= x^n & u(x) &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ v(x) &= \ln(x) & v'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\int x^n \ln(x) dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x) \right] - \int \frac{x^n}{n+1} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

3-Donner une primitive sur $] - 1, 1[$ de la fonction Arcsin .

Réponse : On pose :

$$u'(t) = 1$$

$$u(t) = t$$

$$v(t) = \text{Arcsin}(t)$$

$$v'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - 1, 1[$ et :

$$\int \text{Arcsin}(t) dt = [t \text{Arcsin}(t)] - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = t \text{Arcsin}(t) + \sqrt{1-t^2}$$

4-Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{3 + \ln(x)}{(4 + \ln(x))^2}$.

Réponse : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{e^{-4}\}$. La fonction à intégrer est de la forme $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = 4 + \ln(x)$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{e^{-4}\}$ est :

$$F : x \mapsto \frac{x}{4 + \ln(x)}$$