1-Démontrer que la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t-i}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2-Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \geq |x - y|$.
Démontrer que f est strictement monotone.

3-Est-il possible de trouver une bijection f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non monotone ?
Même question si l'on impose f continue.

4-Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue, démontrer que f est bornée.

5-Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ croissante telle que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ décroissante. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

6-Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(f(x)) = -x$$

Montrer que f n'est pas continue.

1-Démontrer que la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t-i}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Réponse : Pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{1}{t-i} = \frac{t+i}{t^2+1} = \frac{t}{t^2+1} + i\frac{1}{t^2+1}$$

Les parties réelles et imaginaires : $t \mapsto \dfrac{t}{t^2+1}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+1}$ sont continues sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2-Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \geq |x - y|$.
Démontrer que f est strictement monotone.

Réponse : L'application f est injective car si on prend $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = f(y)$ alors la relation de l'énoncé nous donne directement $x = y$. Une application continue et injective est strictement monotone.

3-Est-il possible de trouver une bijection f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non monotone ? Même question si l'on impose f continue.

Réponse : • C'est possible, on peut par exemple considérer :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} -x+1 & \text{si } x \in [0,1] \\ x & \text{si } x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\end{array} \right. \end{array}$$

• C'est impossible si f est continue puisqu'une fonction continue et injective est forcément strictement monotone.

4-Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue, démontrer que f est bornée.

Réponse : Comme f est continue, $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des fonctions continues sur le segment $[a, b]$: elles sont bornées. Il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$|\mathrm{Re}(f)| \leq A \text{ et } |\mathrm{Im}(f)| \leq B$$

On en déduit que :

$$|f| = \sqrt{\mathrm{Re}(f)^2 + \mathrm{Im}(f)^2} \leq \sqrt{A^2 + B^2}$$

ce qui démontre que f est bornée.

5-Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ croissante telle que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ décroissante. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Réponse : Soit $a > 0$, grâce à la croissance de f et au théorème de la limite monotone, on sait que les limites à gauche et à droite en a existent et :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \to a^+} f(x) \qquad (1)$$

De même, par décroissance de $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$:

$$\frac{\displaystyle\lim_{x \to a^+} f(x)}{a} \leq \frac{f(a)}{a} \leq \frac{\displaystyle\lim_{x \to a^-} f(x)}{a}$$

En multipliant par $a > 0$, on a :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \to a^-} f(x) \qquad (2)$$

Les inégalités (1) et (2) entrainent :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Ce qui implique bien que f est continue en a comme voulu.

6-Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(f(x)) = -x$$

Montrer que f n'est pas continue.

Réponse : On raisonne par l'absurde en supposant que f est continue sur $\mathbb{R}$. L'application f est injective car si l'on suppose que $f(a) = f(b)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ alors en composant par f, on a $f(f(a)) = f(f(b))$, c'est-à-dire $-a = -b$ d'où $a = b$. La fonction f est continue et injective, on en déduit qu'elle est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

Quelque soit le sens de variation de f, on a $f \circ f$ qui est strictement croissante, c'est absurde car $f \circ f = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.