1-Vrai ou faux : si une partie A de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure M alors tout réel inférieur strictement à M est dans A.

2-Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall \varepsilon > 0,\ |a| \leq \varepsilon$. Montrer que $a = 0$.

3-On note $A = \mathbb{Q} \cap]0, +\infty[$. La partie A est-elle majorée ? minorée ? admet-elle un maximum ? un minimum ? une borne supérieure ? une borne inférieure ?

4-On note $A = \left\{ \dfrac{3n^2+4}{n^2+1},\ n \in \mathbb{N} \right\}$. La partie A admet-elle un maximum ? un minimum ? une borne supérieure ? une borne inférieure ?

5-On pose $A = \{(-1)^n + \dfrac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}$. Démontrer que A admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on déterminera.

6-Démontrer que la propriété de la borne inférieure est une conséquence de la propriété de la borne supérieure.

1-Vrai ou faux : si une partie A de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure M alors tout réel inférieur strictement à M est dans A.

Réponse : Prenons $A = [0, 1]$, sa borne supérieure est $M = 1$. Il est clair qu'un réel inférieur à M n'est pas forcément dans A.

2-Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall \varepsilon > 0,\ |a| \leq \varepsilon$. Montrer que $a = 0$.

Réponse : L'hypothèse implique que $|a|$ est un minorant de $\mathbb{R}_+^*$ puisque : $\forall \varepsilon > 0,\ |a| \leq \varepsilon$. Or $0 = \inf(\mathbb{R}_+^*)$ donc $|a| \leq 0$ (le plus grand minorant est plus grand qu'un minorant). Enfin l'inégalité $|a| \leq 0$ implique $a = 0$.

3-On note $A = \mathbb{Q} \cap]0, +\infty[$. La partie A est-elle majorée ? minorée ? admet-elle un maximum ? un minimum ? une borne supérieure ? une borne inférieure ?

Réponse :

• A n'est pas majorée, il existe des rationnels arbitrairement grands.

• A est minorée par -3 par exemple puisque les éléments de A sont positifs.

• A n'étant pas majorée, elle n'admet pas de maximum et de borne supérieure.

• A ne possède pas de minimum car si $m \in A$ est le minimum de A alors $\frac{m}{2}$ appartient à A et est strictement inférieur à m ce qui est contradictoire.
• On a $\inf(A) = 0$ en effet :

- ▶ 0 est un minorant de A
- ▶ Soit $\varepsilon > 0$, $0 + \varepsilon$ n'est pas un minorant de A car il existe

$r \in \mathbb{Q} \cap]0, +\infty[$ tel que $r < \varepsilon$.
(par exemple $r = \frac{1}{n}$ avec $n = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$)

4-On note $A = \left\{ \dfrac{3n^2+4}{n^2+1},\ n \in \mathbb{N} \right\}$. La partie A admet-elle un maximum ? un minimum ? une borne supérieure ? une borne inférieure ?

Réponse : Une étude rapide de $f : x \mapsto \dfrac{3x^2+4}{x^2+1}$ nous montre que cette fonction décroit strictement sur $\mathbb{R}_+$. De plus $f(0) = 4$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

• On en déduit que 4 est un majorant de A et comme $4 \in A$ (pour $n = 0$), on a $\max(A) = \sup(A) = 4$.

• Montrons que $\inf(A) = 3$. D'après l'étude de fonction, 3 est un minorant de A. Soit $\varepsilon > 0$, montrons que $3 + \varepsilon$ n'est pas un minorant de A. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3n^2+4}{n^2+1} = 3$ ainsi il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{3N^2+4}{N^2+1} < 3 + \varepsilon$. D'où le résultat.

Par contre la valeur 3 n'est pas atteinte donc A n'a pas de minimum.

5-On pose $A = \{(-1)^n + \dfrac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}$. Démontrer que A admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on déterminera.

Réponse : • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $-1 \leq (-1)^n + \dfrac{1}{n+1} \leq 2$. Ce qui démontre que A est majorée et minorée, de plus c'est une partie de $\mathbb{R}$ non vide. On en déduit qu'elle admet une borne supérieure et une borne inférieure.

• La partie A admet 2 pour majorant et $2 \in A$ (pour $n = 0$), ainsi A admet un maximum 2 qui est aussi la borne supérieure.

• -1 est un minorant de A, montrons que c'est la borne inférieur de A en utilisant la caractérisation avec ε. Soit $\varepsilon > 0$. On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, ainsi il est possible de trouver un entier n_0 impair tel que : $\frac{1}{n_0+1} < \varepsilon$. On en déduit que :

$$(-1)^{n_0} + \frac{1}{n_0+1} < -1 + \varepsilon$$

Ce qui démontre que $-1+\varepsilon$ n'est pas un minorant de A. Finalement -1 est bien le plus grand minorant de A.

6-Démontrer que la propriété de la borne inférieure est une conséquence de la propriété de la borne supérieure.

Réponse : Soit X une partie non vide et minorée. On pose :

$$Y = \{-x,\ x \in X\}$$

L'ensemble Y est non vide car X l'est. De plus X étant minorée donc :

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in X,\ m \leq x \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in X,\ -x \leq -m$$

Ce qui démontre que Y est majorée donc Y admet une borne supérieure M, on en déduit que $-M$ est la borne inférieure de X.