1-Soit $f \in \mathcal{C}^4(I)$, justifier que f' est continue sur I.

2-Que valent : $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I)$ et $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I)$?

3-Étudier la classe de :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \operatorname{ch}(x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

4-Donner le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{4}}$. En déduire une valeur approchée de $1,001^{\frac{1}{4}}$.

5-Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \varphi(f(x))$, démontrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

1-Soit $f \in \mathcal{C}^4(I)$, justifier que f' est continue sur I.

Réponse : Si $f \in \mathcal{C}^4(I)$ alors f est dérivable quatre fois sur I donc dérivable deux fois sur I. Ceci implique que f' est dérivable sur I donc f' est continue sur I.

2-Que valent : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I)$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I)$?

Réponse : • Une fonction qui appartient à $\mathcal{C}^n(I)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I) = \mathcal{C}^\infty(I)$$

On sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^k(I) \subset \mathcal{C}(I)$ d'où :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I) = \mathcal{C}(I)$$

3-Étudier la classe de :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \text{ch}(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Réponse : La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ car cos et ch le sont. Concentrons-nous sur l'étude en 0.

• On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \cos(0) = 1 = f(0) = 1 = \text{ch}(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, ainsi f est continue en 0.

- On a :

$$\frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\sin(0)=0$$

et

$$\frac{\mathrm{ch}(x)-\mathrm{ch}(0)}{x-0} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} \mathrm{sh}(0)=0$$

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$. On en déduit que :

$$\begin{array}{rccl} f' & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} -\sin(x) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ \mathrm{sh}(x) & \text{si } x<0 \end{cases} \end{array}$$

• On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\sin(0) = 0 = f'(0) = 0 = \text{sh}(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)$, ainsi f' est continue en 0.

• On a :

$$\frac{-\sin(x) - (-\sin(0))}{x-0} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\cos(0) = -1$$

et

$$\frac{\text{sh}(x) - \text{sh}(0)}{x-0} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} \text{ch}(0) = 1$$

Ainsi f' n'est pas dérivable en 0

Finalement f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable deux fois en 0.

4-Donner le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{4}}$. En déduire une valeur approchée de $1,001^{\frac{1}{4}}$.

Réponse : La fonction f étant dérivable en 0, elle admet un DL d'ordre 1 en 0 qui s'écrit :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Ce qui devient :

$$(1+x)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4}x + x\varepsilon(x)$$

On a :

$$1,001^{\frac{1}{4}} = (1+0,001)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4} \times 0,001 + 0,001 \times \varepsilon(0,001) \approx 1,00025$$

Les 14 premiers chiffres sont : 1.00024990630465.

5-Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \varphi(f(x))$, démontrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Réponse : Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}_n \ : \ f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$$

- $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ car f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse donc continue sur $\mathbb{R}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$. On a $f' = \varphi \circ f$ qui est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ (puisque φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$). Si f' est de classe $\mathcal{C}^n$ alors f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$. Ce qui achève la récurrence.

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}$$