

1. Vrai ou faux : soit  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im}(z)$  est un argument de  $e^z$ .
2. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ , linéariser  $\cos^3(\theta)$ .
3. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ , développer  $\cos(4\theta)$ .
4. Vrai ou faux :  $-\frac{2\pi}{3}$  est un argument de  $-e^{i\frac{\pi}{3}}$ .
5. Soit  $z \in \mathbb{C}^*$  et  $\theta$  un argument de  $z$ , donner un argument de  $-\bar{z}$ .
6. Donner une écriture exponentielle de  $z_1 = 2\sqrt{6}(1+i)$  et  $z_2 = \sqrt{2}(1+i\sqrt{3})$ .
7. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ , donner le module et un argument de  $z = 1 + e^{i\theta}$ .
- 8- Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ , simplifier  $C_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ .
9. ★ Simplifier le nombre complexe  $z$  suivant en l'écrivant sous forme exponentielle :

$$z = \frac{1 + \cos(a) + i \sin(a)}{\sqrt{1 + \sin(2a)} + i \sqrt{1 - \sin(2a)}} \quad \text{avec } a \in \left] 0, \frac{\pi}{4} \right[$$

1. Vrai ou faux : soit  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im}(z)$  est un argument de  $e^z$ .

---

**Réponse :** Soit  $z = a + ib$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib}$$

Ce qui démontre que la partie imaginaire de  $z$  est un argument de  $e^z$  car  $e^a > 0$ .

2. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ , linéariser  $\cos^3(\theta)$ .

---

**Réponse :** On a :

$$\begin{aligned}\cos^3(\theta) &= \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 \\&= \frac{1}{8} \left( e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta} \right) \\&= \frac{1}{8} \left( e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta} \right) \\&= \frac{1}{8} \left( 2\cos(3\theta) + 6\cos(\theta) \right) \\&= \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos(\theta)\end{aligned}$$

3. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ , développer  $\cos(4\theta)$ .

---

**Réponse :** Avec la formule de De Moivre :  $\cos(4\theta) + i \sin(4\theta)$

$$\begin{aligned} &= (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^4 \\ &= \cos^4(\theta) + 4i \cos^3(\theta) \sin(\theta) - 6 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) - 4i \cos(\theta) \sin^3(\theta) + \sin^4(\theta) \\ &= \left( \cos^4(\theta) - 6 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + \sin^4(\theta) \right) + i \left( 4 \cos^3(\theta) \sin(\theta) - 4 \cos(\theta) \sin^3(\theta) \right) \end{aligned}$$

Il reste à identifier les parties réelles pour en déduire que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos^4(\theta) = \cos^4(\theta) - 6 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + \sin^4(\theta)$$

4. Vrai ou faux :  $-\frac{2\pi}{3}$  est un argument de  $-e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

---

**Réponse :** On a :

$$-e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{-i\pi} e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i(-\pi + \frac{\pi}{3})} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

Ce qui démontre que  $-\frac{2\pi}{3}$  est un argument de  $-e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

5. Soit  $z \in \mathbb{C}^*$  et  $\theta$  un argument de  $z$ , donner un argument de  $-\bar{z}$ .

---

**Réponse :** On peut écrire  $z = re^{i\theta}$  avec  $r \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\theta$  un argument de  $z$ .  
D'où :

$$-\bar{z} = -re^{-i\theta} = re^{i\pi}e^{-i\theta} = re^{i(\pi-\theta)}$$

Ainsi  $\pi - \theta$  est un argument de  $-\bar{z}$ .

6. Donner une écriture exponentielle de :

$$z_1 = 2\sqrt{6}(1 + i) \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{2}(1 + i\sqrt{3})$$

---

**Réponse :** On a  $|z_1| = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{6})^2} = 4\sqrt{3}$  ainsi :

$$z_1 = 4\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

On a  $|z_2| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{2}$ . Ce qui permet d'avoir :

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

7-Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ , donner le module et un argument de  $z = 1 + e^{i\theta}$ .

**Réponse :** On utilise la technique de l'angle moitié :

$$z = 1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Ce qui donne trois cas :

- Si  $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$ , c'est-à-dire  $\theta = \pi [2\pi]$  alors  $z = 0$  ainsi le module de  $z$  vaut 0 et  $z$  n'a pas d'argument.

- Si  $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ , c'est-à-dire  $\theta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ]-\pi + 4k\pi, \pi + 4k\pi[$  alors le

module de  $z$  vaut  $2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$  et un argument de  $z$  est  $\frac{\theta}{2}$ .

- Si  $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0$ , c'est-à-dire  $\theta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ]\pi + 4k\pi, 3\pi + 4k\pi[$  alors le module

de  $z$  vaut  $-2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$  et un argument de  $z$  est  $\frac{\theta}{2} + \pi$ .

8-Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ , simplifier  $C_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ .

---

**Réponse :** On remarque que  $C_n$  est la partie réelle de  $E_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\theta}$ .  
En utilisant la formule du binôme et la technique de l'angle moitié, on a :

$$E_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{i\theta})^k = (e^{i\theta} + 1)^n = \left( e^{i\frac{\theta}{2}} 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^n = 2^n \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^n e^{i\frac{n\theta}{2}}$$

La partie réelle de ce nombre complexe vaut :

$$C_n = 2^n \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

9. ★ Simplifier le nombre complexe  $z$  suivant en l'écrivant sous forme exponentielle :

$$z = \frac{1 + \cos(a) + i \sin(a)}{\sqrt{1 + \sin(2a)} + i \sqrt{1 - \sin(2a)}} \quad \text{avec } a \in \left] 0, \frac{\pi}{4} \right[$$

---

**Réponse :** On commence par réécrire le numérateur avec la technique de l'angle moitié :

$$1 + \cos(a) + i \sin(a) = 1 + e^{ia} = 2e^{i\frac{a}{2}} \cos\left(\frac{a}{2}\right)$$

Pour le dénominateur, on utilise les formules  $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$  et  $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$ , ce qui donne :  $\sqrt{1 + \sin(2a)} + i \sqrt{1 - \sin(2a)} =$

$$\begin{aligned}& \sqrt{\cos^2(a) + \sin^2(a) + 2\sin(a)\cos(a)} + i\sqrt{\cos^2(a) + \sin^2(a) - 2\sin(a)\cos(a)} \\&= \sqrt{(\cos(a) + \sin(a))^2} + i\sqrt{(\cos(a) - \sin(a))^2} \\&= |\cos(a) + \sin(a)| + i|\cos(a) - \sin(a)| \\&= \cos(a) + \sin(a) + i(\cos(a) - \sin(a)) \\&= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(a) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(a)\right) + i\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(a) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(a)\right) \\&= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right)\right) \\&= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}\end{aligned}$$

Ce calcul a pu être fait en remarquant notamment que  $\cos(a) + \sin(a) > 0$  et  $\cos(a) - \sin(a) > 0$  car  $a \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ .

On termine le calcul :

$$z = \frac{2e^{i\frac{a}{2}} \cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-a\right)}} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{a}{2}\right) e^{i\left(\frac{3a}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

C'est la forme exponentielle recherchée car  $\sqrt{2} \cos\left(\frac{a}{2}\right) > 0$  puisque  $a \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ .

$$z = \sqrt{2} \cos\left(\frac{a}{2}\right) e^{i\left(\frac{3a}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$$